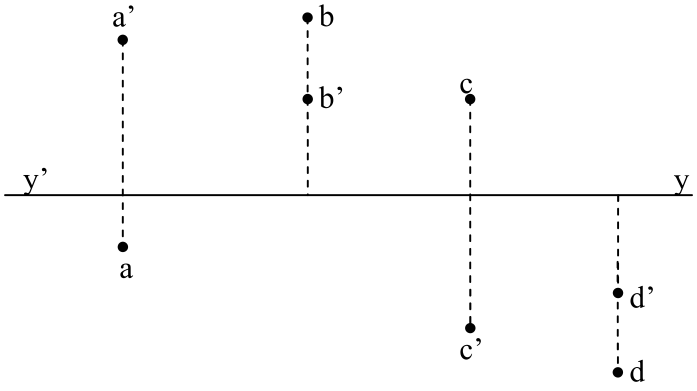
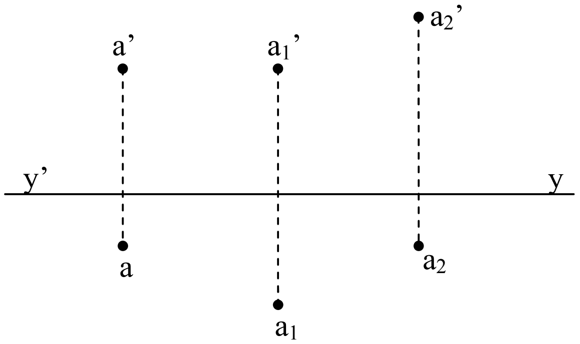
1. Elements de base. Le point. La droite. Le plan

1.1 Le point

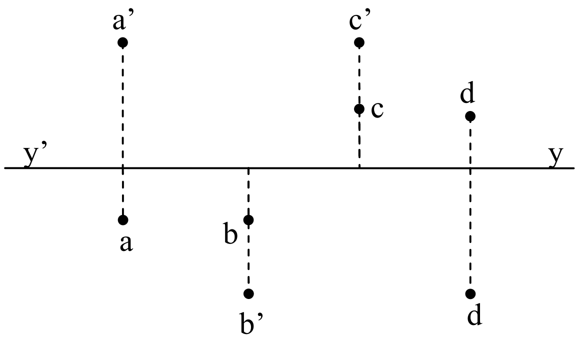
1.1.1 Dessiner l'épure d'un point A du premier quadrant, d'un point B du deuxième quadrant, d'un point C du troisième quadrant, d'un point D du quatrième quadrant.



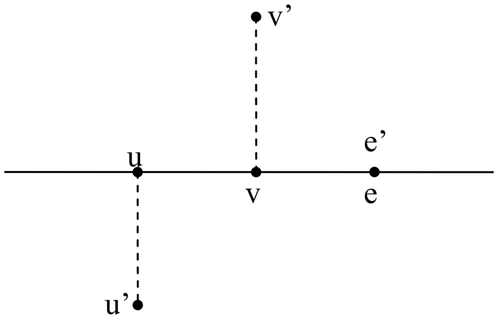
1.1.2 Dessiner l'épure d'un point A du premier quadrant. Quelle est sa côte ? Quel est son éloignement ? Représenter un point A_l de même côte et d'éloignement supérieur, puis un point A_2 de même éloignement et de côte supérieure.



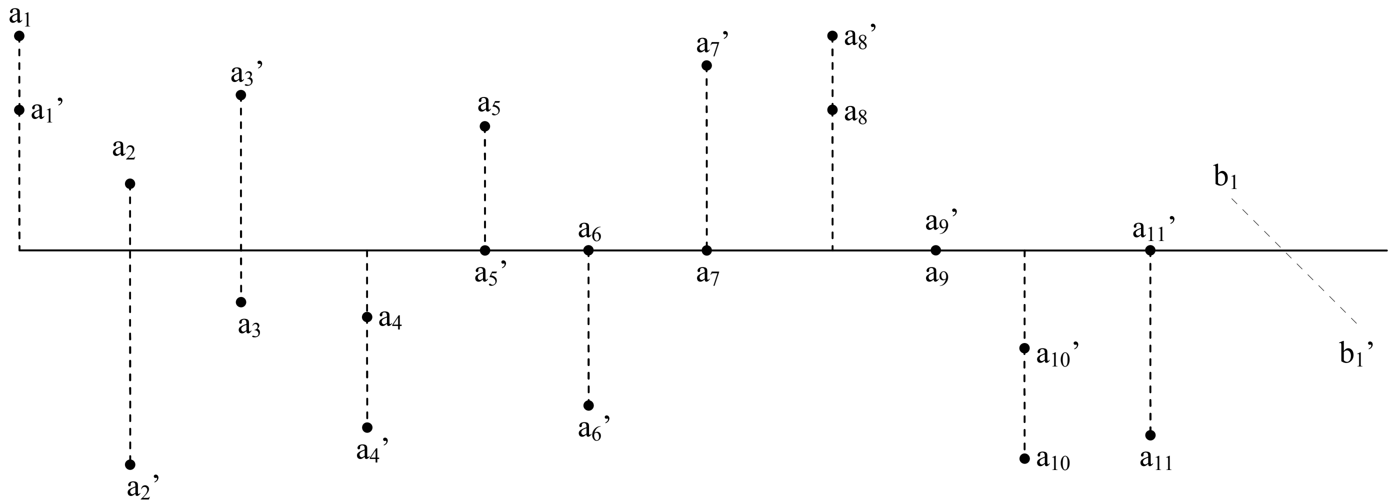
1.1.3 Dessiner l'épure d'un point A du premier quadrant. Représenter ensuite :
un point B de même éloignement que A et de côte opposée, un point C de même côte que A et d'éloignement opposé, puis un point D de côte et d'éloignement opposés à ceux de A.
Dans quel quadrant se trouvent les points B, C et D ?



1.1.4 Représenter un point U situé dans le plan horizontal de projection, un point V situé dans le plan frontal de projection, un point E situé sur la ligne de terre.



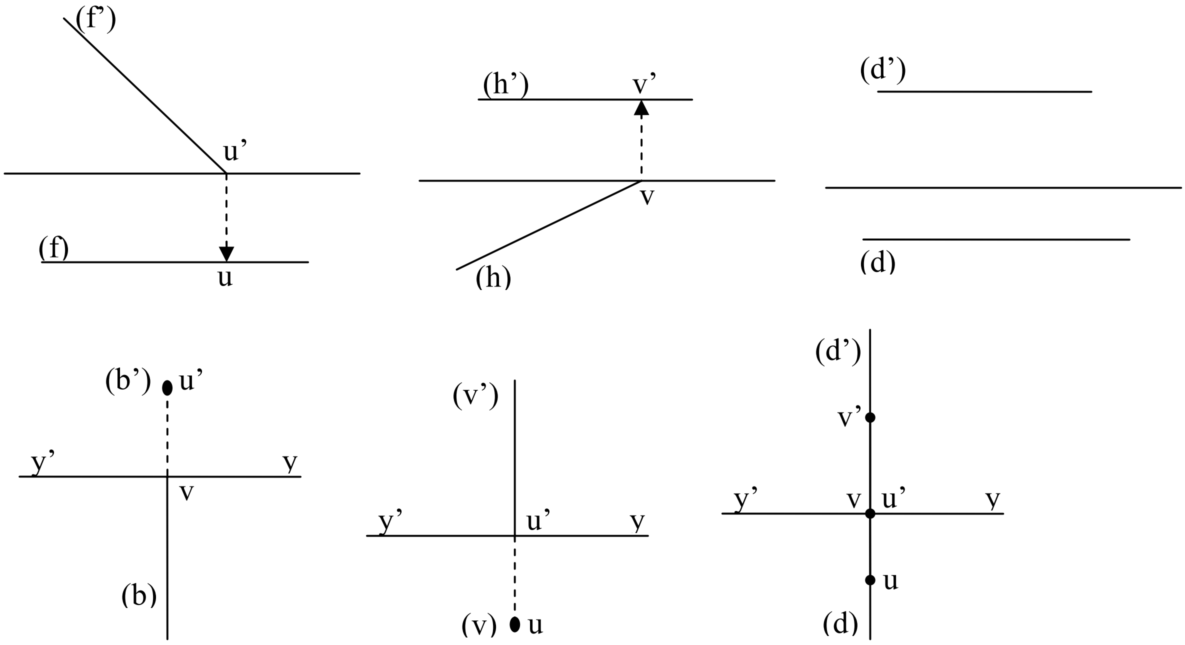
1.1.5 Dans quel quadrants se trouvent les points suivants ?



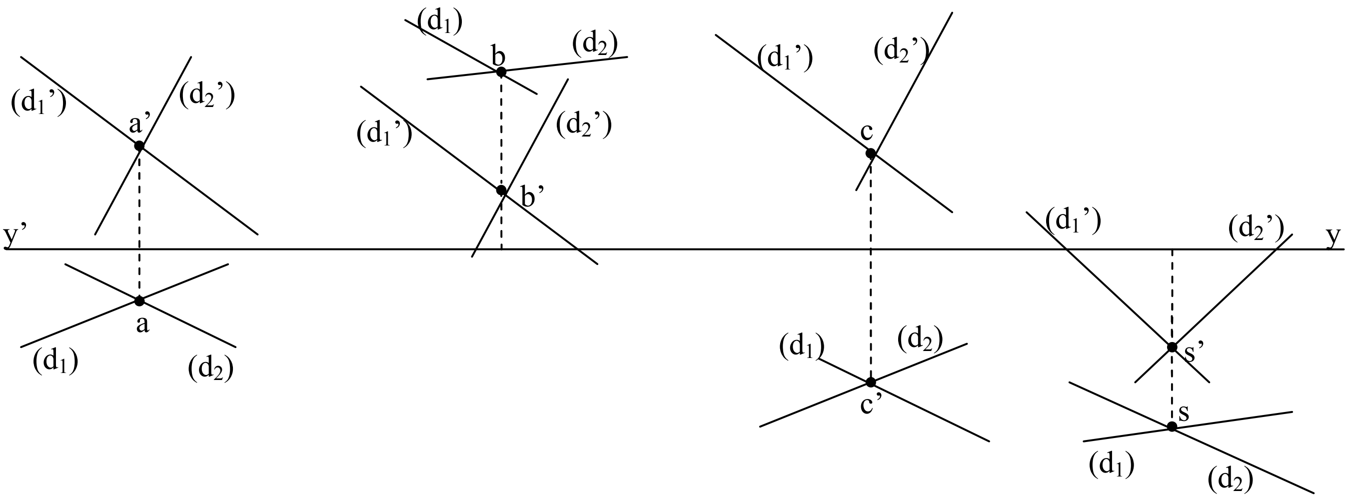
1.2 La droite

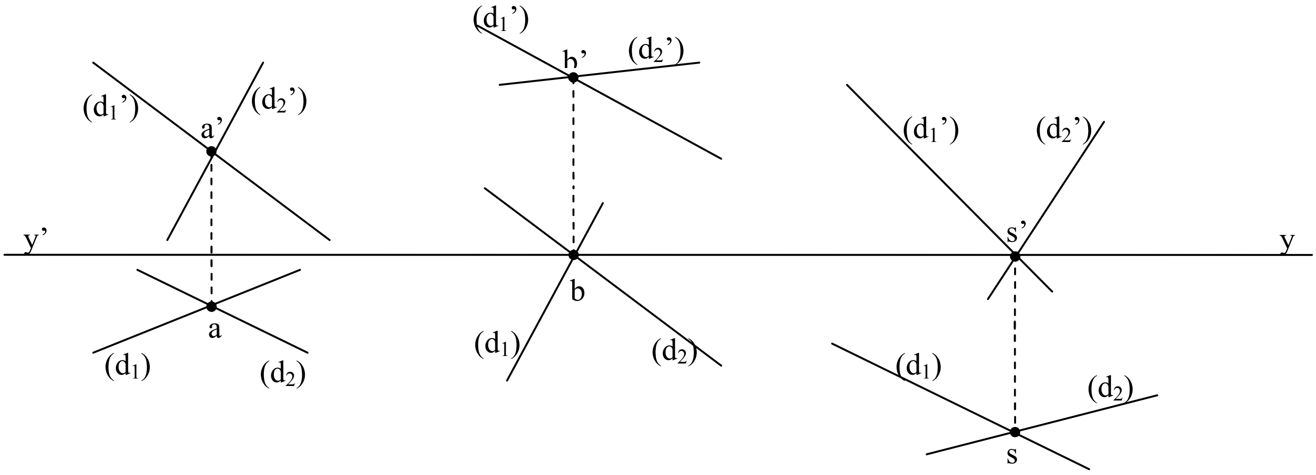
1.2.1) Pour chacune des droites suivantes, dessiner son épure, calculer sa trace, indiquer son nom:

a) (F) parallèle au plan frontal de projection, (droite frontale)
b) (H) parallèle au plan horizontal de projection, (droite horizontale)
c) (G) parallèle à la ligne de terre,
d) (B) perpendiculaire au plan frontal de projection, (droite de bout)
e) (V) perpendiculaire au plan horizontal de projection, (droite verticale)
f) (P) perpendiculaire à la ligne de terre. (droite de profil)



1.2.2) Dessiner en épure deux droites (D_1), (D_2) sécantes, tel que leur point d'intersection S soit :
a) dans le premier quadrant, b) dans le II^{ème} quadrant, c) dans le III^{ème} quadrant,
d) dans le IV^{ème} quadrant, e) sur la ligne de terre f) dans le plan frontal de projection,
g) dans le plan horizontal de projection.





1.2.3) Représenter les droites remarquables (D) passant par les points A et B dans les positions et les quadrants indiqués. Construisez leurs traces.

(D) ∥ $\mathcal{F}$, dans les quadrants I et IV,

(D) ∥ $\mathcal{F}$, dans les quadrants II et III,

(D) ∥ $\mathcal{H}$, dans les quadrants I et II,

(D) ∥ $\mathcal{H}$, dans les quadrants III et IV,

(D) ⊥ $\mathcal{F}$, dans les quadrants I et II,

(D) ⊥ $\mathcal{F}$, dans les quadrants IV et III,

(D) ⊥ $\mathcal{H}$, dans les quadrants I et IV,

(D) ⊥ $\mathcal{H}$, dans les quadrants III et II,

(D) ∥ LT, dans le quadrant I,
(D) ∥ LT, dans le quadrant II,
(D) ∥ LT, dans le quadrant III,
(D) ∥ LT, dans le quadrant IV,

(D) ⊥ LT, dans les quadrants I,II et IV,
(D) ⊥ LT, dans les quadrants I, II et III,
(D) ⊥ LT, dans les quadrants II, III et IV,
(D) ⊥ LT, dans les quadrants I, III et IV,

(D) dans le premier plan bissecteur $\mathcal{B}is1$

(D) dans le deuxième plan bissecteur $\mathcal{B}is2$

(D) ∥ $\mathcal{B}is1$, dans les quadrants I, IV et III,

(D) ∥ $\mathcal{B}is1$, dans les quadrants I, II et III,

(D) ∥ $\mathcal{B}is2$, dans les quadrants I, II et IV,

(D) ∥ $\mathcal{B}is2$, dans les quadrants II, III et IV,

(D) ⊥ $\mathcal{B}is1$, dans les quadrants I, II et IV,

(D) ⊥ $\mathcal{B}is1$, dans les quadrants II, III et IV,

(D) ⊥ $\mathcal{B}is2$, dans les quadrants I, IV et III,

(D) ⊥ $\mathcal{B}is2$, dans les quadrants I, II et III.

1.3 Le plan

On considère les plans suivants :

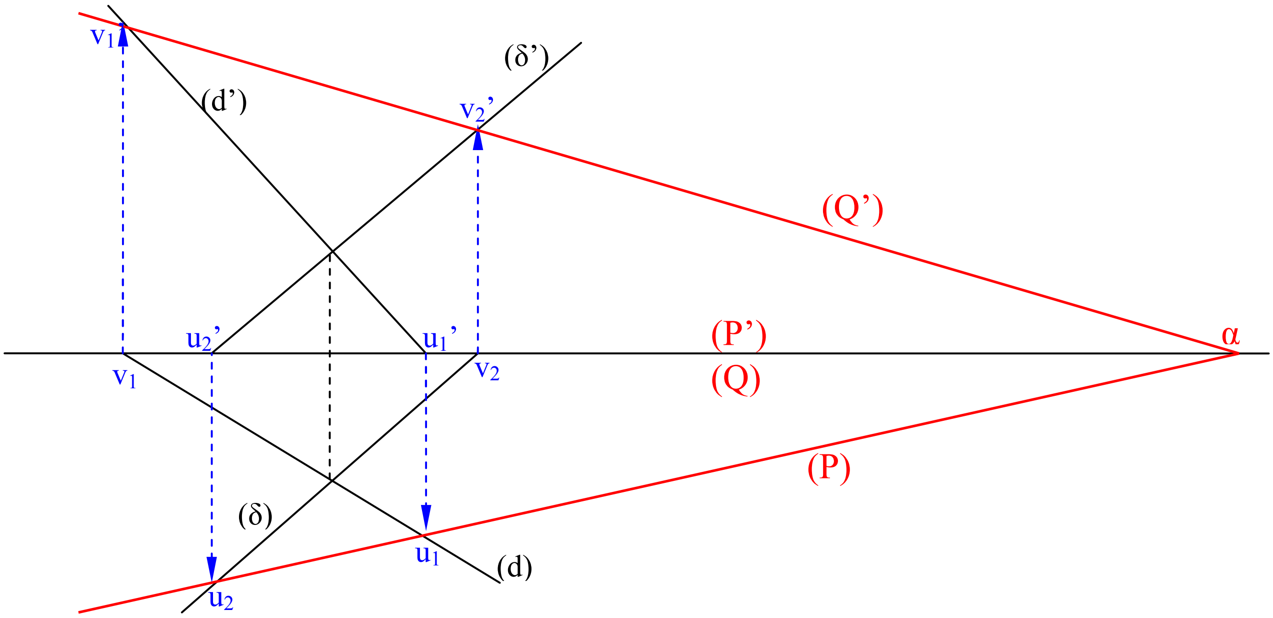
a) un plan qui fait 30° avec le plan horizontal et perpendiculaire au plan frontal. (Plan De bout)
b) un plan qui fait 60° avec le plan frontal et perpendiculaire au plan horizontal. (Plan Vertical)
c) un plan qui fait 45° avec le plan frontal, 45° avec le plan horizontal et passant par l'axe de pliage entre les quadrants I et III (1er Plan Bissecteur)
d) un plan qui fait 45° avec le plan frontal, 45° avec le plan horizontal et passant par l'axe de pliage entre les quadrants II et IV (2 ème Plan Bissecteur)
e) 45° avec le plan frontal, 45° avec le plan horizontal, et parallèle à l'axe de pliage, dans les quadrants II, I et IV. (Plan parallèle au 2 ème plan bissecteur)
f) 45° avec le plan frontal, 45° avec le plan horizontal, et parallèle à l'axe de pliage, dans les quadrants II, III et IV. (Plan parallèle au 2 ème plan bissecteur)
g) parallèle au plan horizontal, dans les quadrants I et II (Plan Horizontal)
h) parallèle au plan horizontal, dans les quadrants III et IV
i) parallèle au plan frontal, dans les quadrants I et IV (Plan frontal)
j) parallèle au plan frontal, dans les quadrants II et III (Plan frontal)
k) perpendiculaire simultanément aux plans verticaux et horizontaux. (Plan De Profil)

1.3.1) Visualiser chacun de ces plans, (par exemple à l'aide d'un dièdre en papier et d'une feuille de papier). Visualiser également les traces du plan et représenter ces traces dans l'épure.
Parmi ces plans, 5 sont des plans remarquables. Ecrivez le nom de ces plans dans l'épure.

1.3.2) Pour chacun des plans de la question précédente, dessiner l'épure d'un point A qui appartient au plan, mais n'appartient pas aux traces du plan. A quel quadrant appartient le point A ?

1.3.3) Pour chacun des plans de la question précédente, dessiner l'épure d'une droite appartenant au plan, dans les cas suivants :
(D) droite quelconque
(F) droite frontale
(H) droite horizontale
(G) droite de profil.

1.3.4) Soit un plan déterminé par deux droites sécantes (D) et (Δ), concourantes en A. Construire les traces du plan.



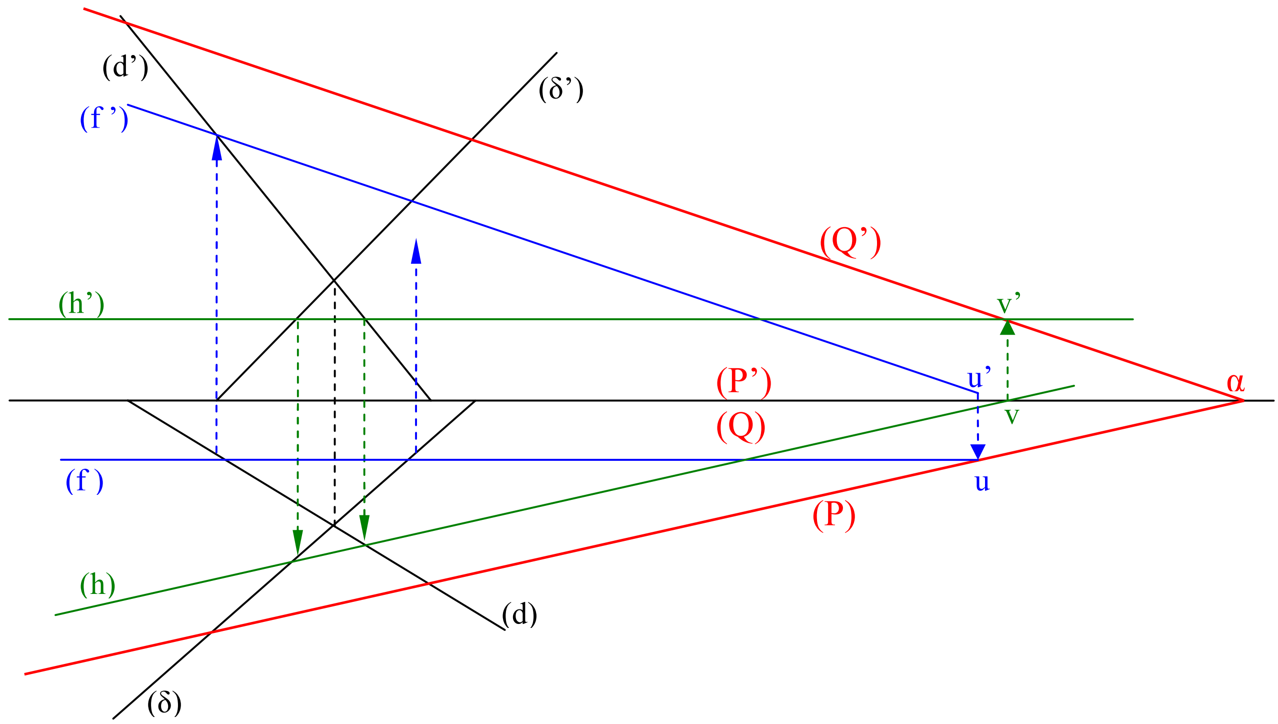
Solution 1 : Comme les deux droites (D) et (Δ) sont dans le plan alors leurs points de trace doivent se trouver sur les droites de trace correspondantes du plan.
On détermine donc les points de trace (U_1) et (V_1) de la droite (D) et les points de trace (U_2) et (V_2) de la droite (Δ). Ensuite on fait passer la trace frontale (Q) du plan par les deux points de trace frontale (V_1) et (V_2) et la trace horizontale (P) du plan par les deux points de trace horizontale (U_1) et (U_2).

a) On détermine les points de trace des deux droites sécantes (D) et (Δ) :
on note (U_1) et (V_1) les points de trace de la droite (D) : $(U_1) = (D) \cap H$ et $(V_1) = (D) \cap F$
on note (U_2) et (V_2) les points de trace de la droite (Δ) : $(U_2) = (\Delta) \cap H$ et $(V_2) = (\Delta) \cap F$.
Au niveau des projections de ces points on a :
$u_1' = (d') \cap LT$ et on descend en ligne de rappel en $u_1 \in (d)$
$v_1 = (d) \cap LT$ et on remonte en ligne de rappel en $v_1' \in (d')$
et
$u_2' = (\delta') \cap LT$ et on descend en ligne de rappel en $u_1 \in (\delta)$
$v_2 = (\delta) \cap LT$ et on remonte en ligne de rappel en $v_1' \in (\delta')$

b) Les points v_1' et v_2' déterminent la projection frontale (Q') de la trace frontale (Q) du plan.
Les points u_1 et u_2 déterminent la projection horizontale (P) de la trace horizontale (P) du plan.

Remarques : Les droites (Q') et (P) doivent s'intersecter sur la ligne de terre.
N'oubliez pas les projections (P') et (Q) des traces, qui sont sur la ligne de terre.

Solution 2 : On construit une horizontale et une frontale du plan. On détermine les points de trace de ces deux droites particulières du plan. On fait passer les droites de trace du plan par ces points, (Q) parallèle avec la frontale et (P) parallèle avec l'horizontale.



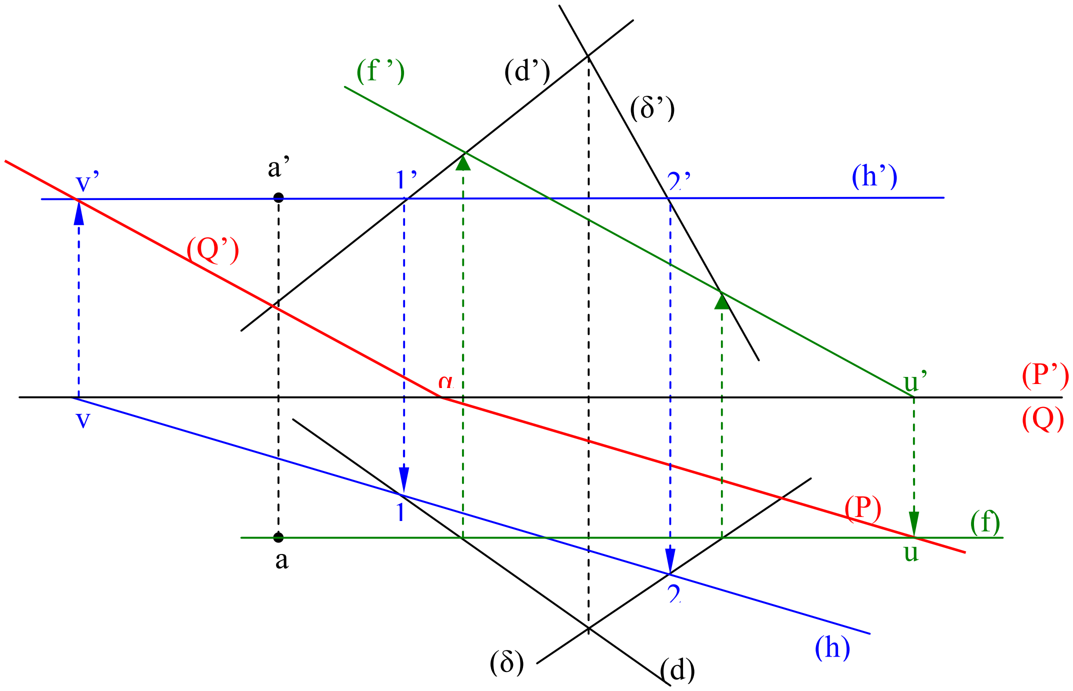
a) On choisit une frontale (F) du plan avec sa projection horizontale (f) parallèle avec la ligne de terre.
On note 1 = (f) ∩ (d) et 2 = (f) ∩ (δ).
Des points 1 et 2 on remonte en ligne de rappel pour trouver 1’ ∈ (d’) et 2’ ∈ (δ’).
La projection frontale de la droite (F) est : (f ’) = (1’2’).

b) On choisit une horizontale (H) du plan avec sa projection frontale (h’) parallèle avec la ligne de terre.
On note 3’ = (h’) ∩ (d’) et 4’ = (h’) ∩ (δ’).
Des points 3’ et 4’ on descend en ligne de rappel pour trouver 3 ∈ (d) et 4 ∈ (δ).
La projection horizontale de la droite (H) est : (h) = (34).

c) On détermine les points de traces de la frontale (F) et de l’horizontale (H) du plan :
(U) = (F) ∩ H et (V) = (H) ∩ F :
u’ = (f ’) ∩ LT et on descend en ligne de rappel en u ∈ (f)
v = (h) ∩ LT et on remonte en ligne de rappel en v’ ∈ (h’) .

d) On construit les droites de trace du plan :
la trace frontale (Q) passant par le point V et parallèle avec (F) ; en proj. fr. : (Q’) ‖ (f ’) par v’
la trace horizontale (P) passant par le point U et parallèle avec (H) ; en proj. horiz. : (P) ‖ (h) par u.

1.3.5) Soit le plan Φ défini par les droites (D) et (Δ), soit le point A. Soit (H) une horizontale de Φ et de côte a'. Soit (F) une frontale de Φ et d'éloignement a.
a) construire et nommer les projections de (H) et (F) ainsi que leurs traces
b) construire et nommer les traces du plan Φ

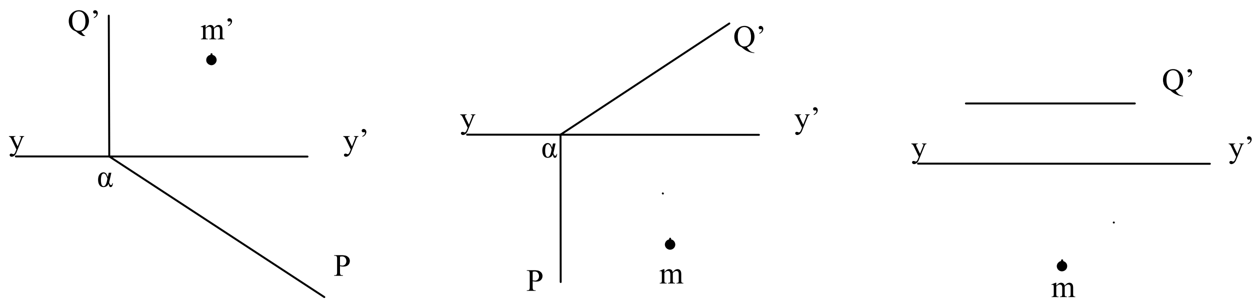


(f ’)
(d’)
(δ’)
v’
a’
1’
2’
(h’)
(Q’)
α
u’
(P’)
(Q)
v
1
(P)
(f)
u
a
2
(h)
(δ)
(d)

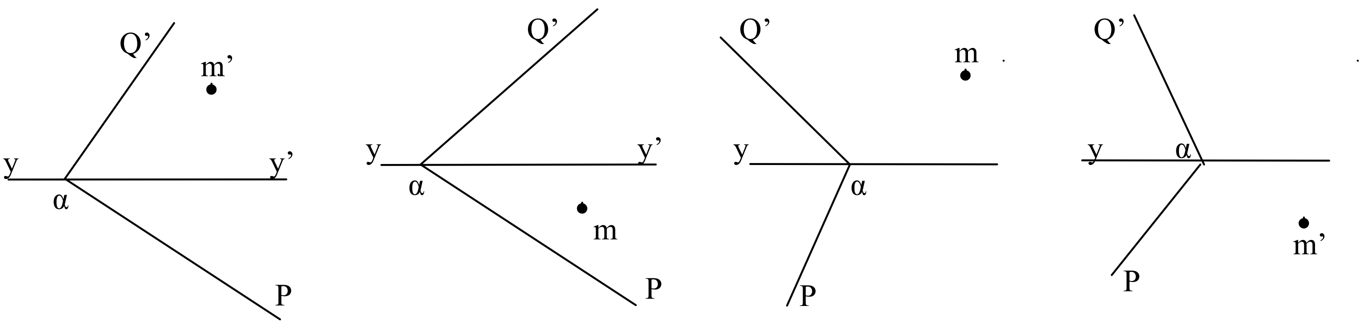
2. Le point dans le plan. La droite dans le plan

2.1) Pour le point M donné, déterminer la projection manquante, tel que M soit un point du plan défini par ses traces (PαQ'), dans les cas suivants :

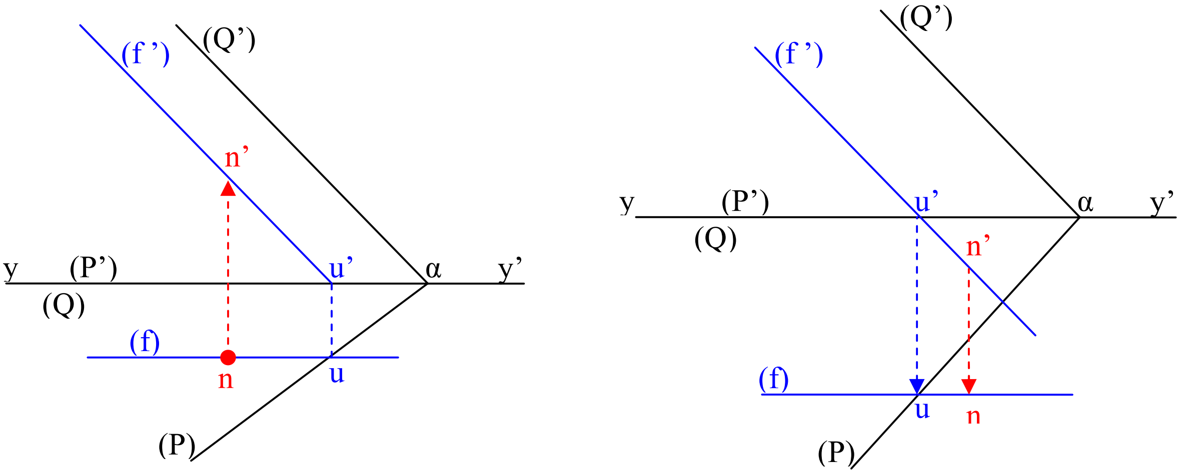
a) (PαQ') plan vertical b) (PαQ') plan de bout c) (PαQ') plan horizontal



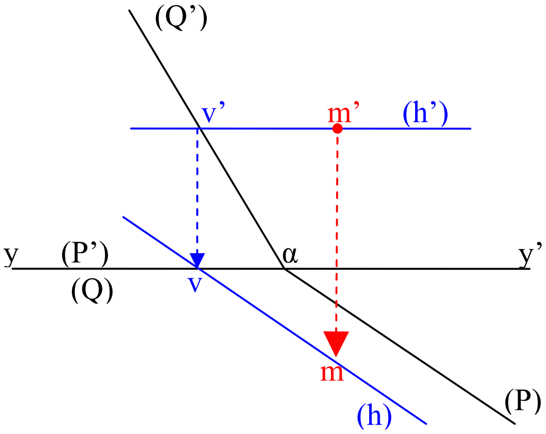
c) (PαQ') plan quelconque

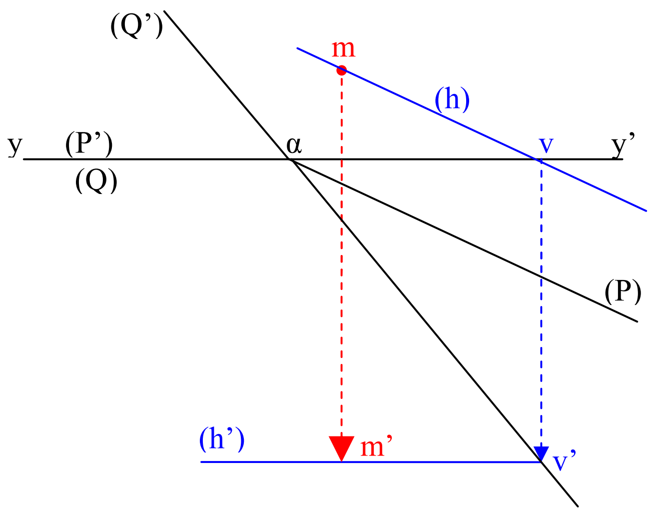


2.1.d) Soit Ω un plan déterminé par ses traces (αPQ). Soit N un point du plan Ω. On connaît une des projections du point N. A l'aide d'une frontale (F) du plan Ω passant par le point N, déterminer la projection manquante du point N, tel qu'il soit un point du plan Ω .

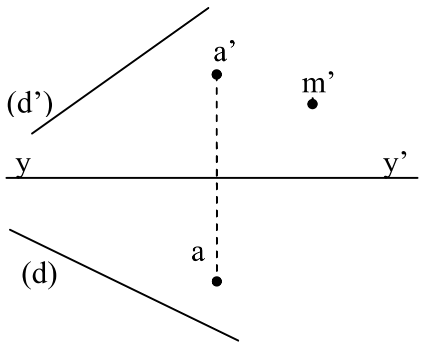


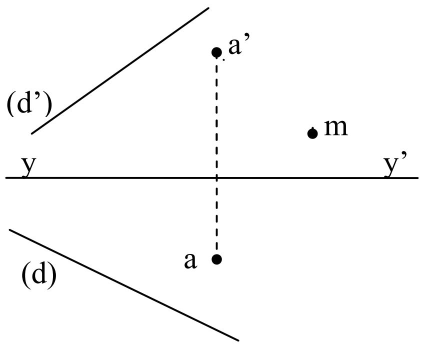
2.1.e) Soit Ω un plan déterminé par ses traces (αPQ). Soit N un point du plan Ω. On connaît une des projections du point N. A l'aide d'une horizontale (H) du plan Ω passant par le point N, déterminer la projection manquante du point N, tel qu'il soit un point du plan Ω .

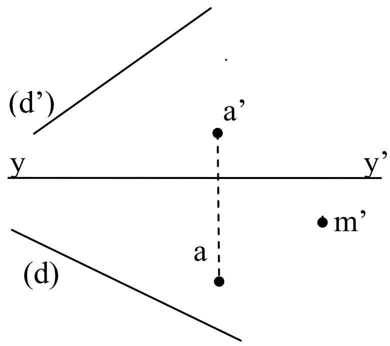




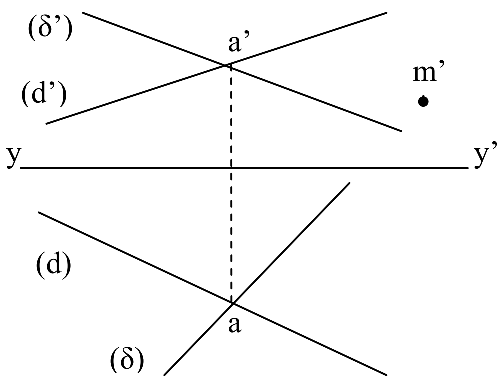
2.2) Pour le point M donné, déterminer la projection manquante, tel que M soit un point du plan défini par une droite (D) et un point A.

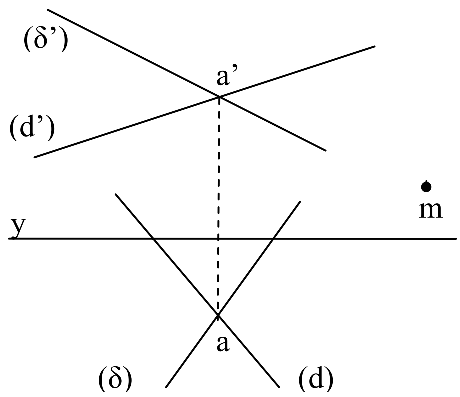






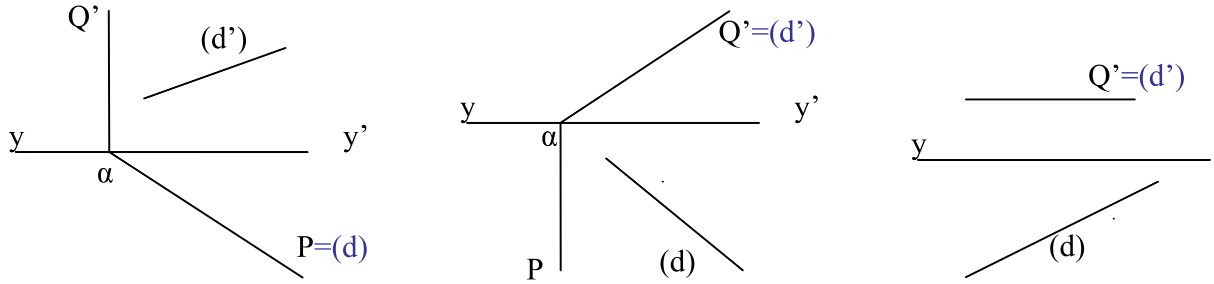
2.3) Pour le point M donné, déterminer la projection manquante, tel que M soit un point du plan défini par deux droites (D) et (Δ) sécantes en un point A.



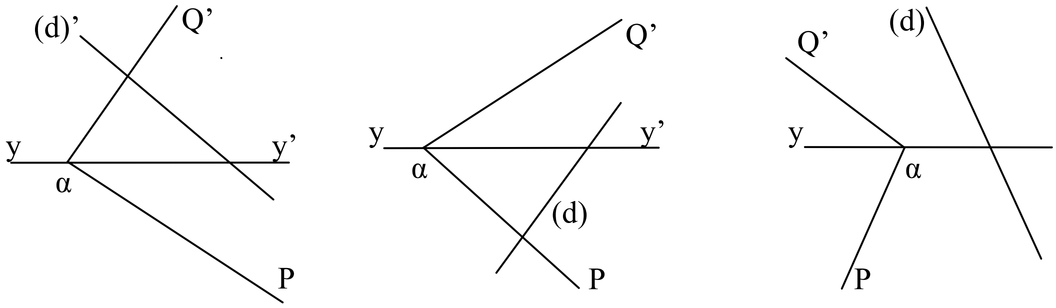


2.4) Pour une droite (D) donnée, déterminer la projection manquante, tel que (D) soit une droite du plan défini par ses traces (PαQ'), dans les cas suivants :

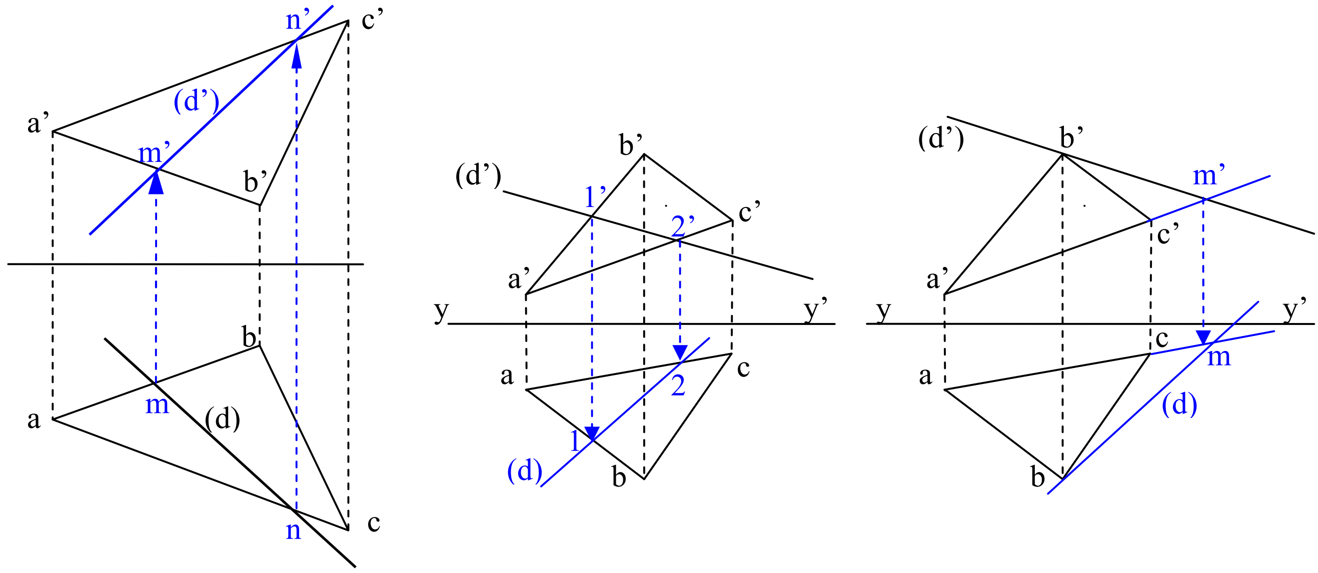
a) (PαQ') plan vertical b) (PαQ') plan de bout c) (PαQ') plan horizontal



c) (PαQ') plan quelconque



2.5) Pour une droite (D) donnée, déterminer la projection manquante, tel que (D) soit une droite du plan défini par trois points A, B, C.



a) Dans le plan P on considère deux droites sécantes, par exemple (AB) et (AC) et on note leurs points d'intersection avec la droite (D) (qui se trouve dans le même plan):

M = (D) ∩ (AB) et N = (D) ∩ (AC).

En projection horizontale, on note les points d'intersection (qui sont donnés en épure) :

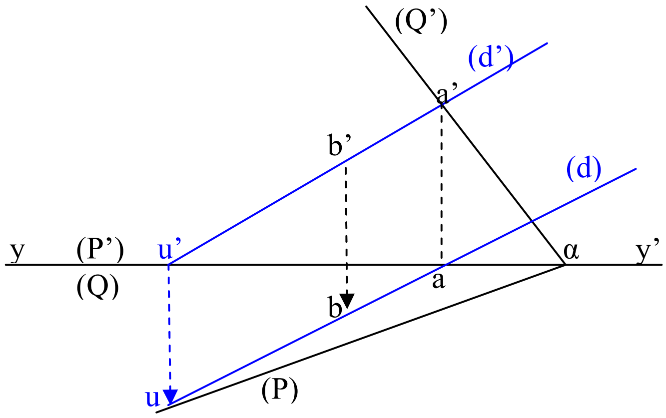
m = (d) ∩ (ab) et n = (d) ∩ (ac).

b) On construit les lignes de rappel qui montent des points m ∈ (ab) et n ∈ (ac) et on détermine leurs intersections avec les projections frontales correspondantes :

m ∈ (ab) → m' ∈ (a'b')   et   n ∈ (ac) → n' ∈ (a'c')

c) Les points m'et n' déterminent la droite (d') de projection frontale de (D) : (d') = (m'n').

2.6) Soit A et B deux points d'un plan Ω. En utilisant la droite (D) déterminée par ces deux points, construire la projection horizontale du point B.



1) Comme A et B sont deux points du plan Ω, la droite (D) déterminée par ces points fait partie du plan :

$$(D) = (AB) \subset \Omega .$$

2) En épure sont données les projections frontales : (d') = (a 'b').

3) En projection horizontale, en épure on a une seule projection horizontale a, du point A. Pour déterminer la projection horizontale de la droite (D) il nous faut encore un point de cette droite. On va déterminer le point de trace U de (D), avec ses projections (u, u') :

$U = (D) \cap (P) \Rightarrow u' = (d') \cap LT$ et on descende en ligne de rappel en $u = (d) \cap (P)$.

Remarque : l'autre point de trace (frontale) est déjà donné en épure. C'est le point A.

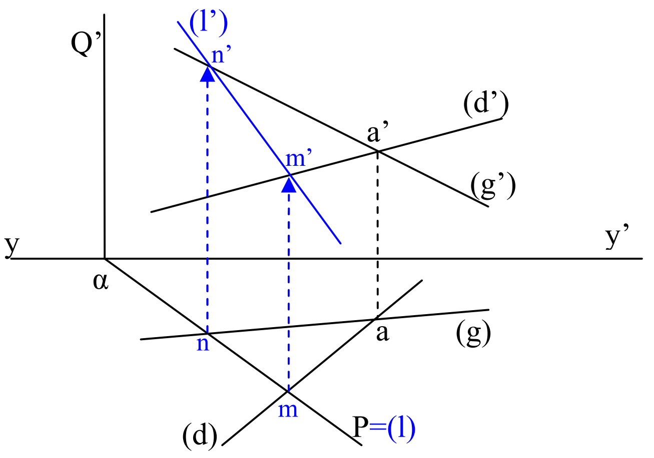
4) On détermine la projection horizontale (d) de la droite (D) : (d) = (u a).

5) Comme B∈ (D), de b' ∈ (d') on descende en ligne de rappel en b ∈ (d).

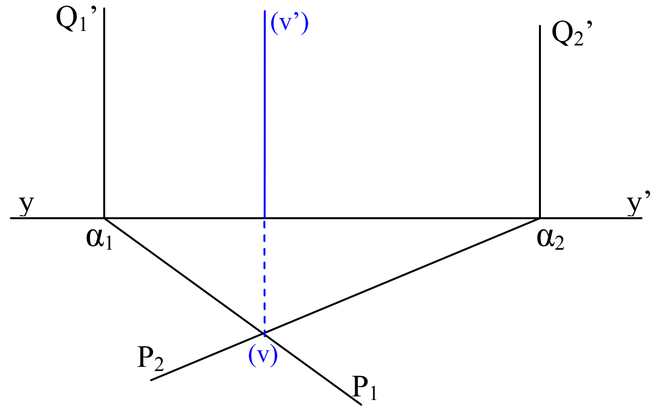
3. Intersection de deux plans

3.1. Cas des plans particuliers

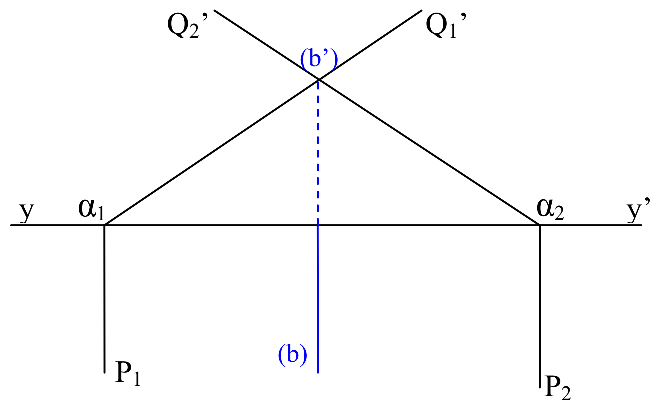
3.1.1) Soit $\mathcal{V}$ un plan vertical, défini par ses traces (PαQ') et $\mathcal{P}$ un plan défini par deux droites concourantes (D) et (G). Déterminer la droite (L) d'intersection des deux plans.



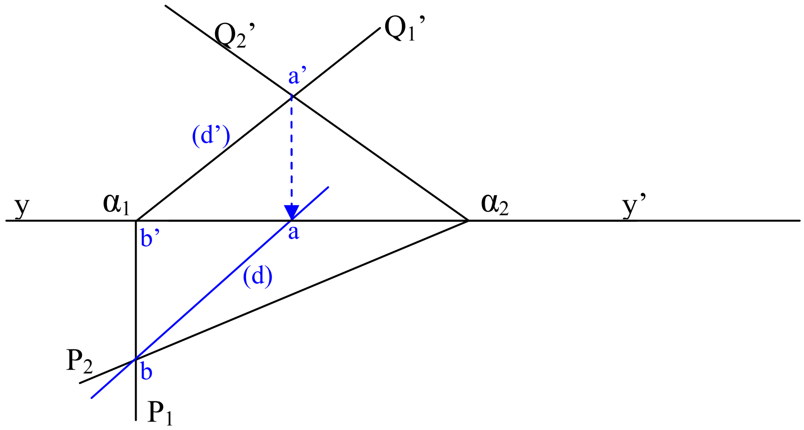
3.1.2) Soit $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux plans verticaux, définis par leurs traces ($P_1\alpha_1Q_1$') et ($P_2\alpha_2Q_2$'). Déterminer l'intersection des deux plans.



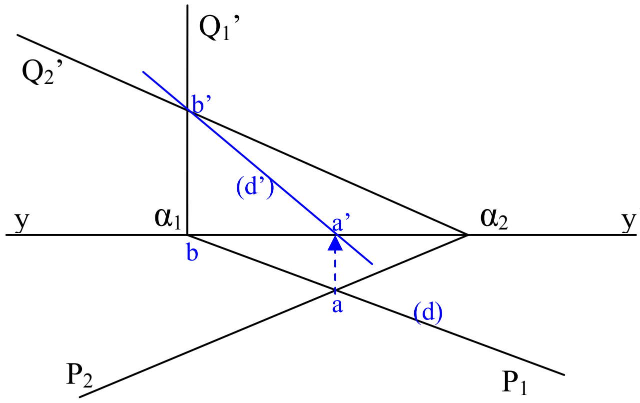
3.1.3) Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux plans de bout, définis par leurs traces ($P_1\alpha_1Q_1$') et ($P_2\alpha_2Q_2$'). Déterminer l'intersection des deux plans.



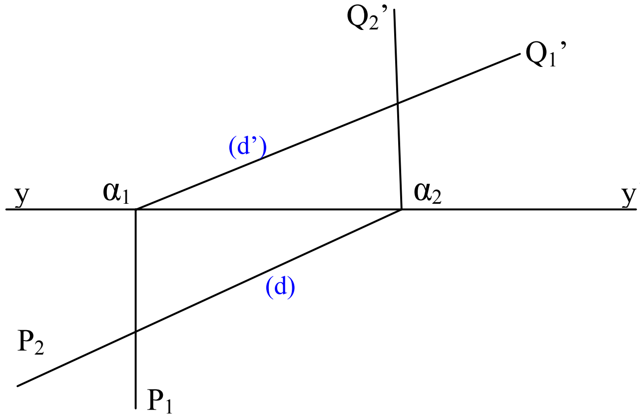
3.1.4) Soit $\mathcal{B}_1$ un plan de bout, défini par ses traces ($P_1\alpha_1Q_1'$) et $\mathcal{P}$ un plan quelconque, défini par ses traces ($P_2\alpha_2Q_2'$). Déterminer la droite (D) d'intersection des deux plans.



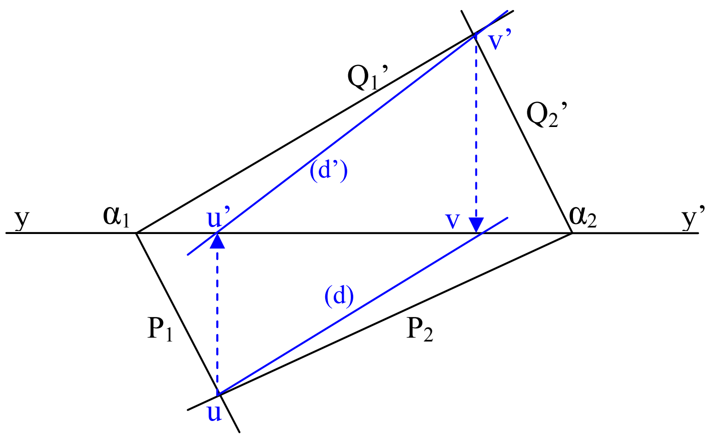
3.1.5) Soit $\mathcal{V}_1$ un plan vertical, défini par ses traces ($P_1\alpha_1Q_1'$) et $\mathcal{P}$ un plan quelconque, défini par ses traces ($P_2\alpha_2Q_2'$). Déterminer la droite (D) d'intersection des deux plans.



3.1.6) Soit $\mathcal{B}_1$ un plan de bout et $\mathcal{V}_2$ un plan vertical, définis par leurs traces ($P_1\alpha_1Q_1'$) et ($P_2\alpha_2Q_2'$). Déterminer la droite (D) d'intersection des deux plans.



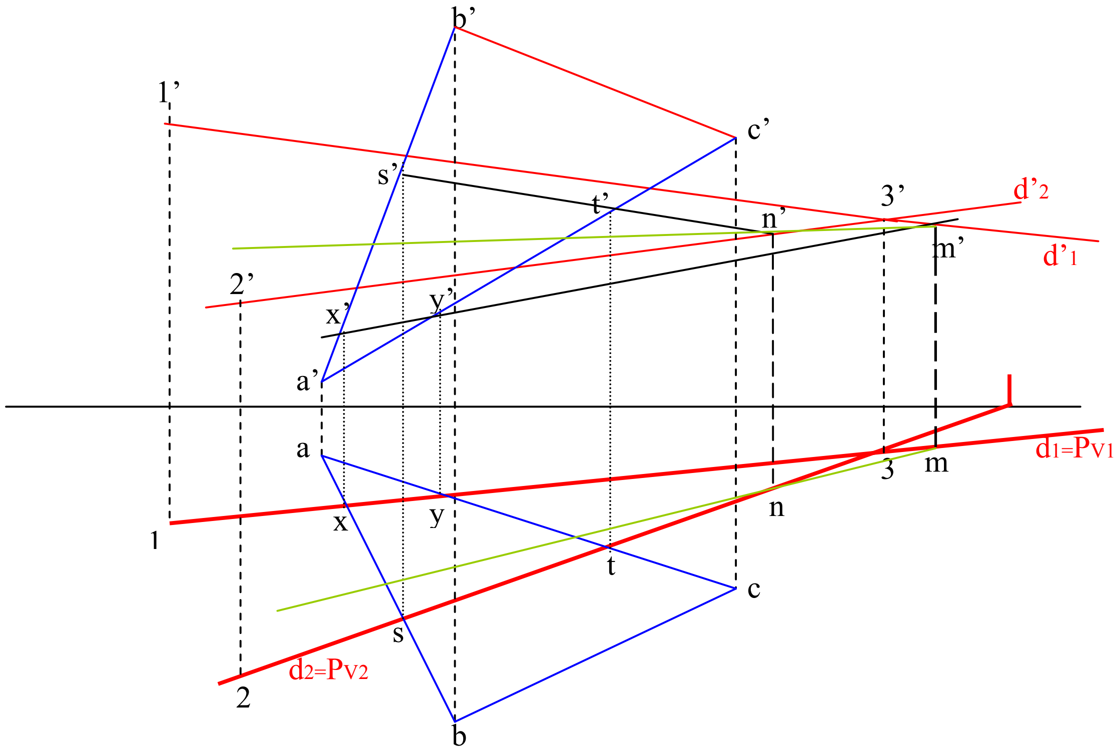
3.1.7) Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans quelconques, définis par leurs traces ($P_1\alpha_1Q_1'$) et ($P_2\alpha_2Q_2'$). Déterminer la droite (D) d'intersection des deux plans.



Q1'
v'
Q2'
(d')
y
α1
u'
v
α2
y'
(d)
P1
P2
u

3.2. Méthode des plans auxiliaires

3.2.1.a) Soit 2 plans définis par 2 droites sécantes (3 points) : P1=(12 3), P2=(ABC).
Déterminer l'intersection des deux plans.



Remarque : Dans chaque plan on a trois droites sécantes :

$\mathcal{P}_1$: (12), (2 3), (1 3), $\mathcal{P}_2$: (AB), (BC), (AC)

qui ne s'intersectent pas par paires, une du premier plan avec une du deuxième plan.

Dém : Vérifier que les points d'intersection suivants ne sont pas sur la même ligne de rappel :

$(13)\cap(ab)$ et $(1'3')\cap(a'b')$
$(13)\cap(ac)$ et $(1'3')\cap(a'c')$ etc
$(13)\cap(bc)$ et $(1'3')\cap(b'c')$

Ce qu'on peut déterminer c'est :

a) Le point, noté M, d'intersection de la droite (1 3), notée D_1, avec le plan $\mathcal{P}_2$=(ABC).
b) Le point, noté N, d'intersection de la droite (2 3), notée D_2, avec le plan $\mathcal{P}_2$=(ABC).

Alors les points M et N déterminent la droite d'intersection des deux plans : (MN)= $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

---

a) Détermination du point d'intersection $M = D_1 \cap \mathcal{P}_2$.

1) On introduit le plan vertical V_1 contenant la droite D_1 = (1 3).

2) Comme $D_1 \subset V_1 \Rightarrow D_1 \cap \mathcal{P}_2 \in V_1 \cap \mathcal{P}_2$ où

$D_1 \cap \mathcal{P}_2$ = M, le point d'intersection à déterminer (4)

$V_1 \cap \mathcal{P}_2$ = (XY), une droite d'intersection à déterminer (3)

3) Détermination de la droite d'intersection (XY) = $V_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Comme $D_1 \subset V_1$ = plan vertical $\Rightarrow$ la projection horizontale d_1=(13) de la droite D_1 coïncide avec la trace horizontale P_{V1}du plan vertical V_1 : $d_1 = P_{V1}$

Donc en projection horizontale on a les points d'intersection :

$x = P_{V1} \cap (ab)$ et en remontant en ligne de rappel $x' \in (a'b')$
$y = P_{V1} \cap (ac)$ $y' \in (a'c')$

On obtient les points d'intersection $X(x,x') = (AB) \cap V_1$ et $Y(y,y') = (AC) \cap V_1$.

Les deux points X et Y déterminent la droite d'intersection $XY = V_1 \cap \mathcal{P}_2$

4) Détermination du point $M = D_1 \cap \mathcal{P}_2$ comme un point de la droite $XY = V_1 \cap \mathcal{P}_2$.

On détermine le point M par l'intersection $M = D_1 \cap (XY)$:

$m' = (1'3') \cap (x'y')$ et on descend en ligne de rappel pour trouver $m \in (13)$

(Remarque : $m \in (xy)$ aussi, car $(13) = (xy)$.)

$\Rightarrow$ $M(m,m') = D_1 \cap (XY)$

---

b) Détermination du point d'intersection $N = D_2 \cap \mathcal{P}_2$.

1) On introduit le plan vertical V_2 contenant la droite $D_2 = (2\ 3)$.

2) Comme $D_2 \subset V_2 \Rightarrow D_2 \cap \mathcal{P}_2 \in V_2 \cap \mathcal{P}_2$ où

$D_2 \cap \mathcal{P}_2 = N$, le point d'intersection à déterminer (4)

$V_2 \cap \mathcal{P}_2 = (ST)$, une droite d'intersection à déterminer (3)

3) Détermination de la droite d'intersection $(ST) = V_2 \cap \mathcal{P}_2$.

Comme $D_2 \subset V_2$ = plan vertical $\Rightarrow$ la projection horizontale $d_2=(23)$ de la droite D_2 coïncide avec la trace horizontale P_{V2}du plan vertical V_2 : $d_2 = P_{V2}$

Donc en projection horizontale on a les points d'intersection :

$s = P_{V2} \cap (ab)$ et en remontant en ligne de rappel $s' \in (a'b')$

$t = P_{V2} \cap (ac)$ $t' \in (a'c')$

On obtient les points d'intersection $S(s,s') = (AB) \cap V_2$ et $T(t,t') = (AC) \cap V_2$.

Les deux points S et T déterminent la droite d'intersection $ST = V_2 \cap \mathcal{P}_2$

4) Détermination du point $N = D_2 \cap \mathcal{P}_2$ comme un point de la droite $ST = V_2 \cap \mathcal{P}_2$.

On détermine le point N par l'intersection $N = D_2 \cap (ST)$:

$n' = (2'3') \cap (s't')$ et on descend en ligne de rappel pour trouver $n \in (23) = (st)$

$\Rightarrow N(n,n') = D_2 \cap (ST)$

<u>Solution alternative</u> 1) Soit les deux plans :

$\mathcal{P}_1 = (12\ 3)$, déterminé par les droites $D_1 = (1\ 3)$ et $D_2 = (2\ 3)$, sécantes en 3

$\mathcal{P}_2 = (ABC)$, déterminé par les droites $\Delta_1 = (AB)$ et $\Delta_2 = (AC)$, sécantes en A.

2) Soit deux plans auxiliaires horizontaux, H_1 et H_2 , dont les traces frontales Q'_1 et Q'_2 sont parallèles à la ligne de terre.

3) L'intersection des plans horizontaux H_1 et H_2 avec les deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se fait selon deux droites horizontales, horizontales des plans, dont les projections frontales se trouvent sur les traces frontales Q'_1 et Q'_2 :

$H_1 \cap \mathcal{P}_1 = G_1$ $H_2 \cap \mathcal{P}_1 = T_1$

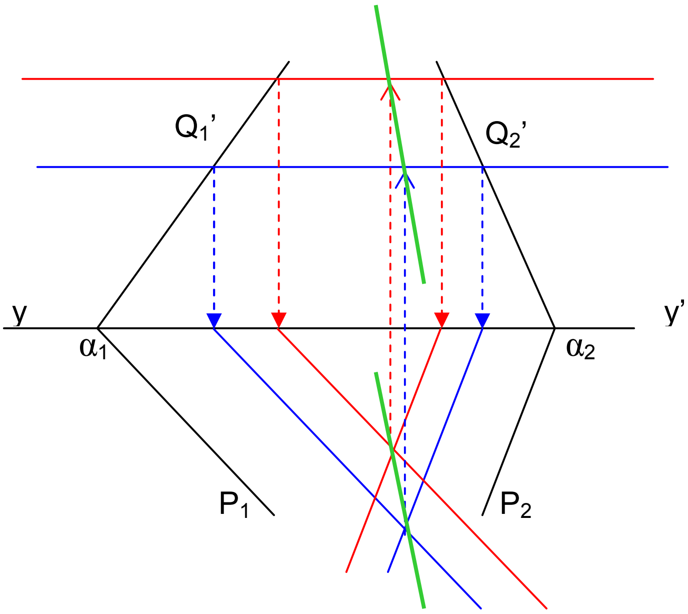
$H_2 \cap \mathcal{P}_2 = G_2$ $H_2 \cap \mathcal{P}_2 = T_2$

4) La droite d'intersection de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est déterminée par les deux points :

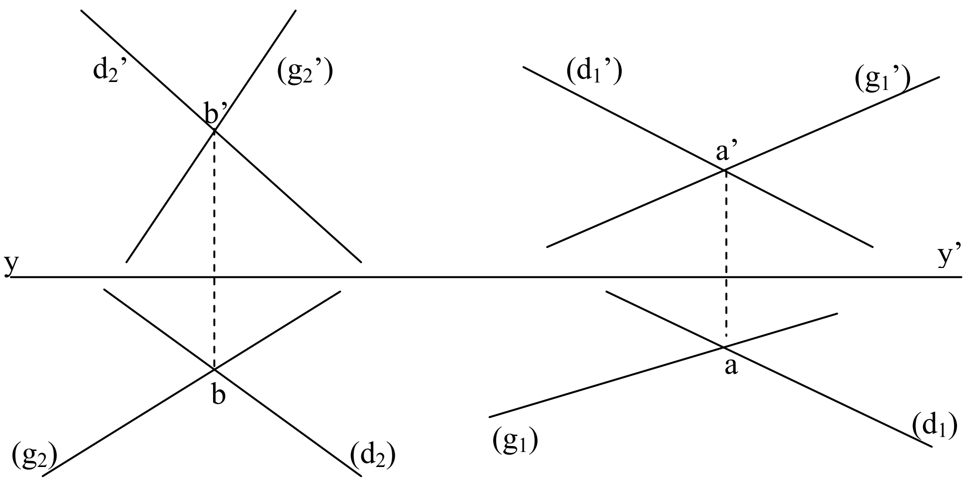
$M = G_1 \cap G_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap H_1$

$N = T_1 \cap T_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap H_2$

3.2.1.b) Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans quelconques, définis par leurs traces $(P_1\alpha_1Q_1')$ et $(P_2\alpha_2Q_2')$. Ces traces ne se coupent pas dans les limites de l'épure. Déterminer l'intersection des deux plans, en utilisant deux plans auxiliaires horizontaux $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.



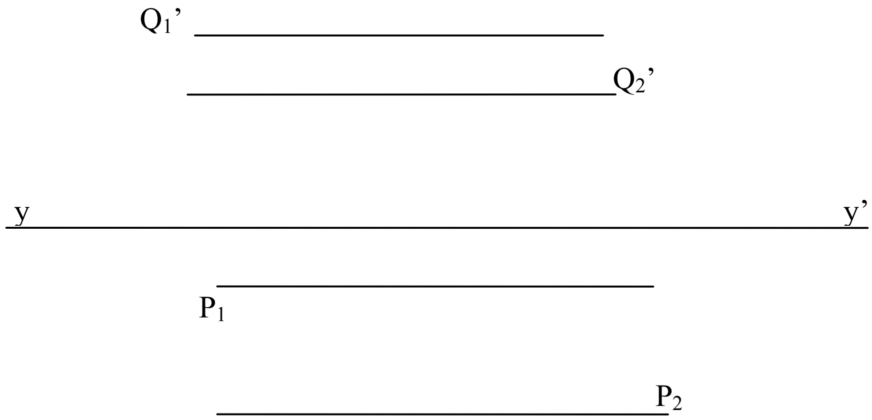
3.2.2) Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans quelconques, défini chacun par deux droites concourantes (D_1), (G_1) et (D_2), (G_2). Déterminer l'intersection des deux plans, en utilisant deux plans auxiliaires horizontaux $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.



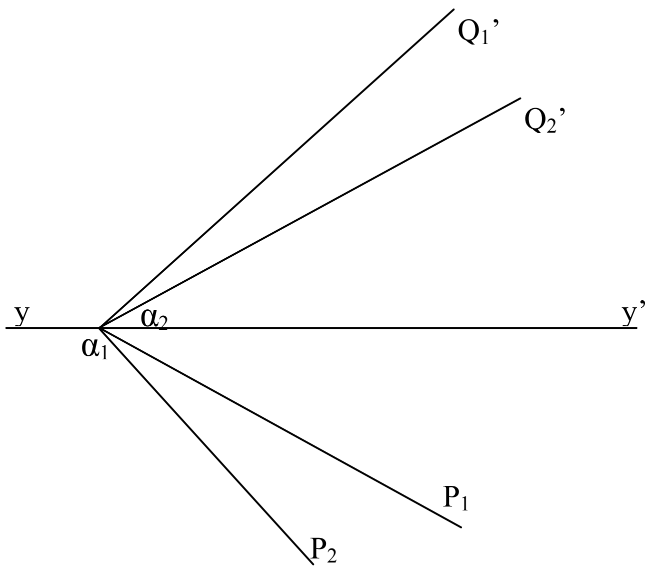
3.2.3) Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles à la ligne de terre, définis par leurs traces ($P_1\alpha_1Q_1'$) et ($P_2\alpha_2Q_2'$). Déterminer l'intersection des deux plans, en utilisant :

a) un seul plan auxiliaire vertical $\mathcal{V}$.

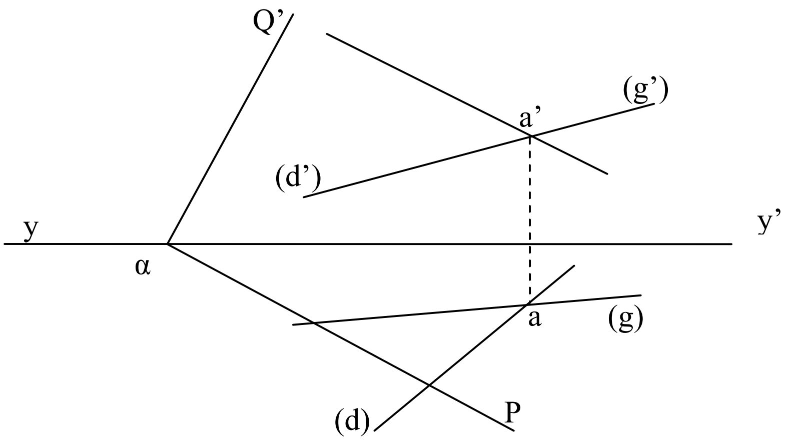
b) un seul plan auxiliaire de bout $\mathcal{B}$.



3.2.4) Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans définis par leurs traces ($P_1\alpha_1Q_1'$) et ($P_2\alpha_2Q_2'$) et dont les traces se coupent en un même point de la ligne de terre ($\alpha_1 = \alpha_2$). Déterminer l'intersection des deux plans, en utilisant un seul plan auxiliaire vertical $\mathcal{V}$.



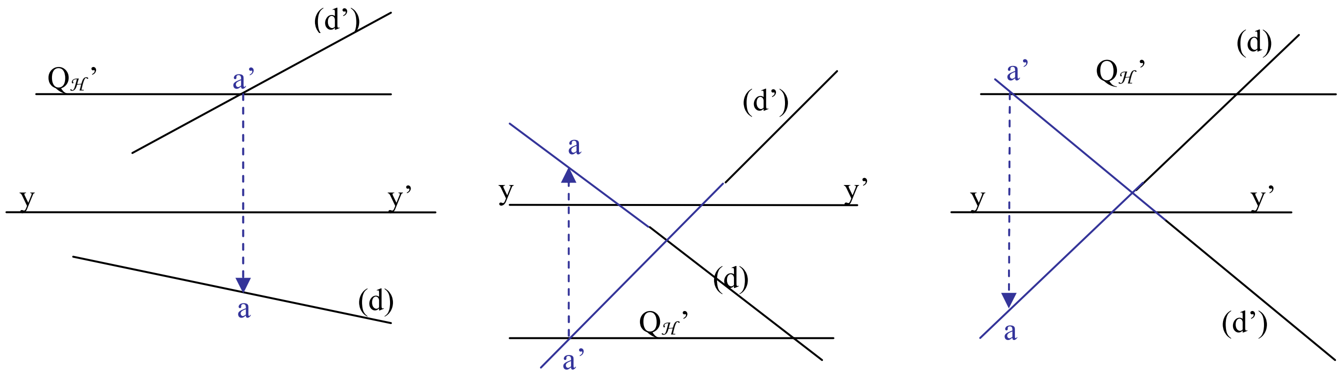
3.2.5) Soit $\mathcal{P}_1$ un plan défini par ses traces ($P\alpha Q'$) et $\mathcal{P}_2$ un plan défini par deux droites concourantes (D) et (G). Déterminer l'intersection des deux plans.



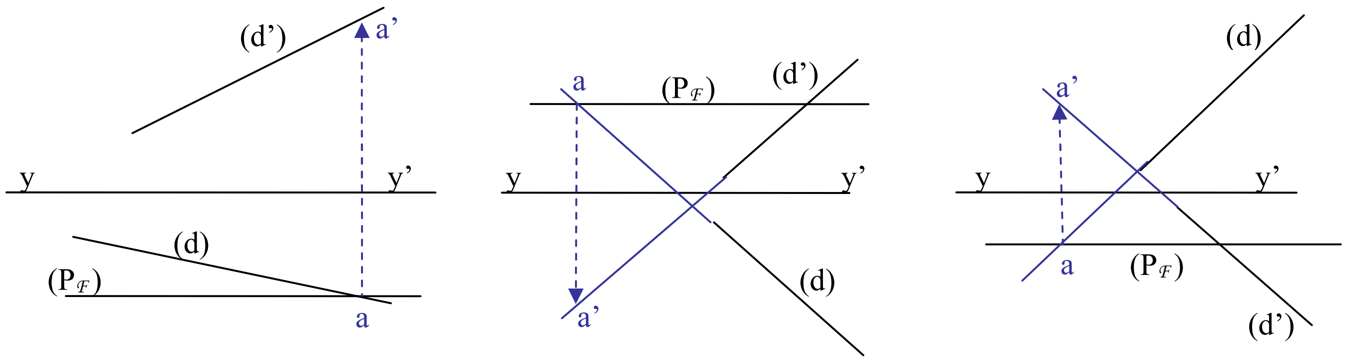
4. Intersection d'une droite avec un plan

4.1. Cas des plans particuliers

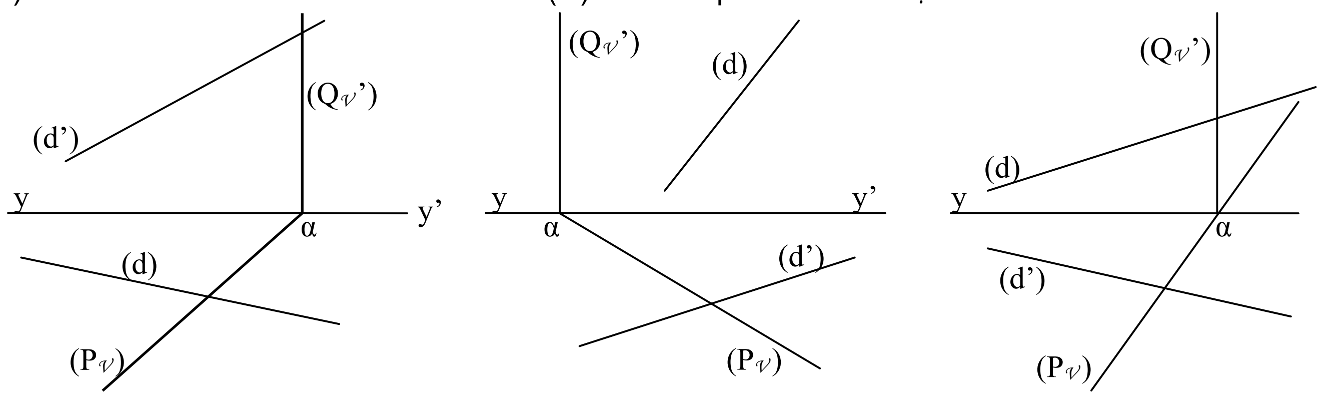
1) Déterminer l'intersection d'une droite quelconque (D) avec un plan horizontal $\mathcal{H}$.



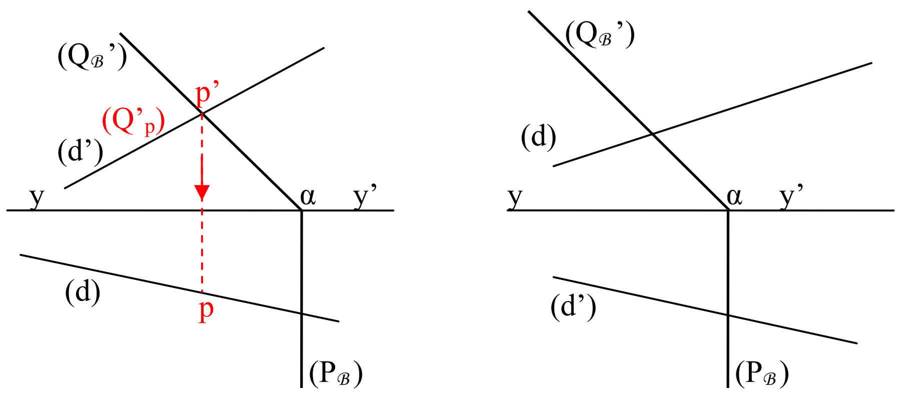
2) Déterminer l'intersection d'une droite (D) avec un plan frontal $\mathcal{F}$.



3) Déterminer l'intersection d'une droite (D) avec un plan vertical $\mathcal{V}$.



4) Déterminer l'intersection d'une droite (D) avec un plan de bout $\mathcal{B}$.

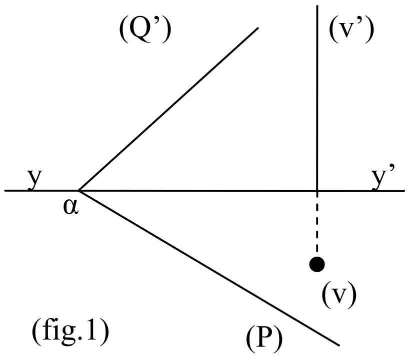


4.2. Cas des droites particulières

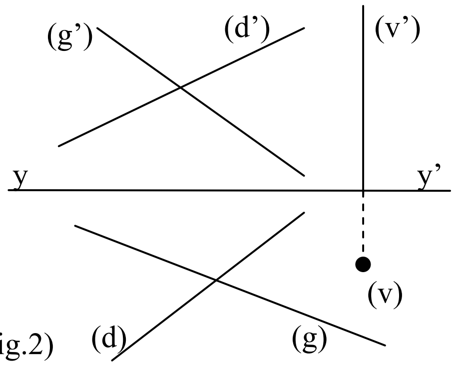
5) Déterminer l'intersection d'une droite verticale (V) (axe vertical) avec un plan $\mathcal{P}$ défini

a) par ses traces (PαQ') (fig.1)

b) par deux droites sécantes (D) et (G) (fig.2).

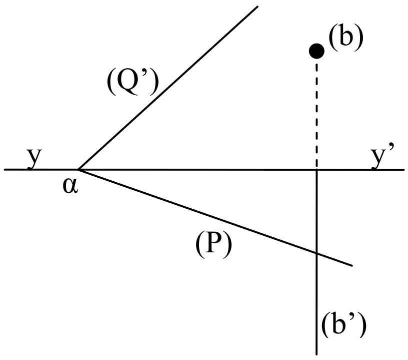


(fig.1)



(fig.2)

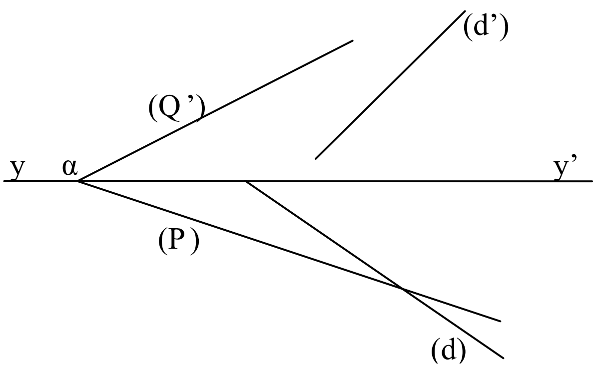
6) Déterminer l'intersection d'une droite de bout (B) (axe de bout) avec un plan $\mathcal{P}$ défini par ses traces (PαQ').

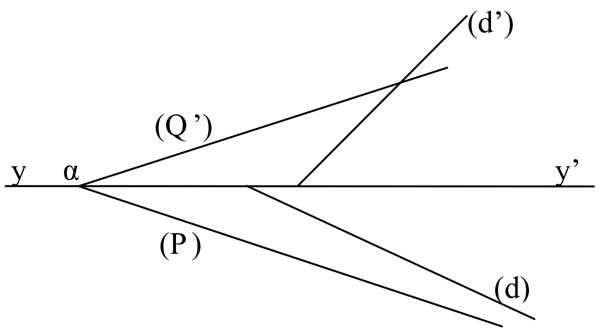


4.3. Méthode des plans auxiliaires

5) Déterminer l'intersection d'une droite (D) avec un plan $\mathcal{P}$ défini par ses traces (PαQ'), en utilisant : a) un plan auxiliaire vertical

b) un plan auxiliaire de bout.

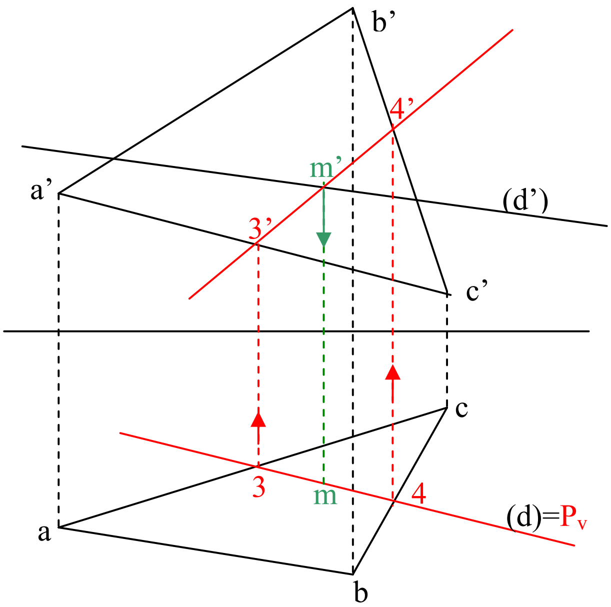




6) Déterminer l'intersection d'une droite (D) avec un plan $\mathcal{P}$ défini par 3 points, en utilisant :

a) un plan auxiliaire vertical

b) un plan auxiliaire de bout.



Solution 1 :

1) Soit $\mathcal{V}$ un plan vertical qui contient la droite (D). (*Il existe toujours un tel plan !*). Alors la projection horizontale de la droite (D) coïncide avec la trace horizontale (P_V) du plan $\mathcal{V}$: (d) = (P_V).

2) On détermine la droite d’intersection entre le plan auxiliaire vertical et le plan $\mathcal{P}$.

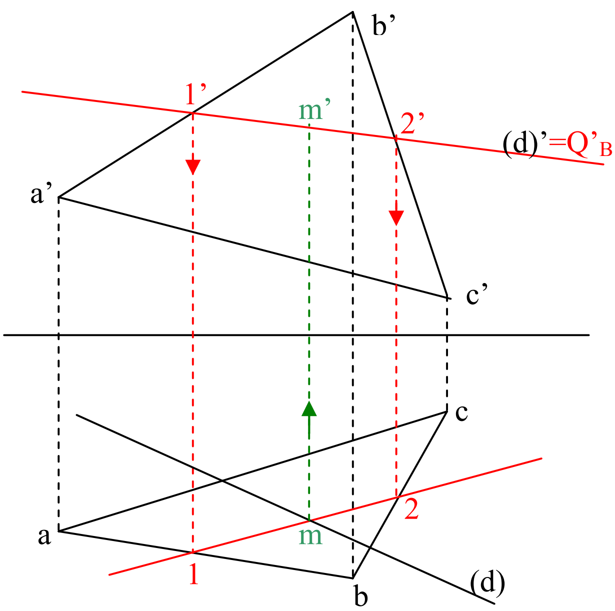
On note : 3 = (P_V) ∩ (a c) et 4 = (P_V) ∩ (b c)
et en remontant en ligne de rappel on trouve 3’ ∈ (a’c’) et 4’∈ (b’c’) .

On obtient ainsi les points 3 = (3,3’) et 4 = (4,4’) d’intersection entre le plan vertical $\mathcal{V}$ et les droites (AC) et (BC) du plan $\mathcal{P}$: 3 = $\mathcal{V}$ ∩ (AC), 4 = $\mathcal{V}$ ∩ (BC).

Les points 3 et 4 déterminent la droite d’intersection entre le plan vertical $\mathcal{V}$ et le plan $\mathcal{P}$ = (ABC) : (3 4) = $\mathcal{V}$ ∩ $\mathcal{P}$.

3) 0n détermine le point d’intersection demandé : M = (D) ∩ $\mathcal{P}$.

0n détermine le point M d’intersection entre la droite (D) et le plan $\mathcal{P}$ à l’intersection entre la droite (D) et la droite auxiliaire (3 4) = $\mathcal{V}$ ∩ $\mathcal{P}$, qui sont deux droites coplanaires de $\mathcal{V}$: M = (D) ∩ (3 4) :
on détermine m’ = (d’) ∩ (3’4’) et en descendant en ligne de rappel on trouve m∈ (3 4) = (d) = (P_V).



Solution 2 :

1) Soit $\mathcal{B}$ un plan de bout qui contient la droite (D). (*Il existe toujours un tel plan !*).
Alors la projection frontale de la droite (D) coïncide avec la trace frontale (Q') du plan $\mathcal{B}$: (d') = (Q').

2) On détermine la droite d'intersection entre le plan auxiliaire de bout et le plan $\mathcal{P}$.

On note : $1' = (Q') \cap (a'b')$ et $2' = (Q') \cap (b'c')$ et en descendant en ligne de rappel on trouve $1 \in (a\,b)$ et $2 \in (b\,c)$.

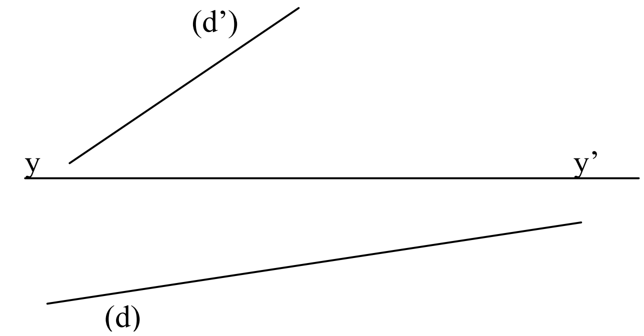
On obtient ainsi les points $1 = (1,1')$ et $2 = (2,2')$ d'intersection entre le plan de bout $\mathcal{B}$ et les droites (AB) et (BC) du plan $\mathcal{P}$: $1 = \mathcal{B} \cap (AB)$, $2 = \mathcal{B} \cap (BC)$.

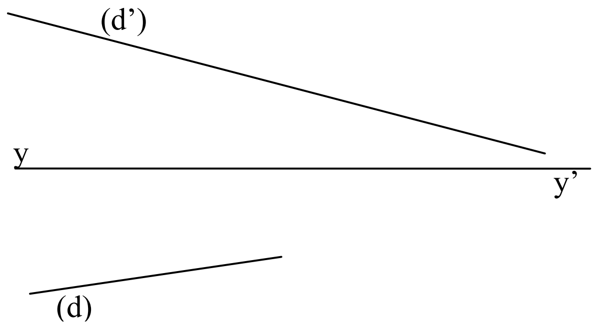
Les points 1 et 2 déterminent la droite d'intersection entre le plan de bout $\mathcal{B}$ et le plan $\mathcal{P} = (ABC)$: $(12) = \mathcal{B} \cap \mathcal{P}$.

3) 0n détermine le point d'intersection demandé : $M = (D) \cap \mathcal{P}$

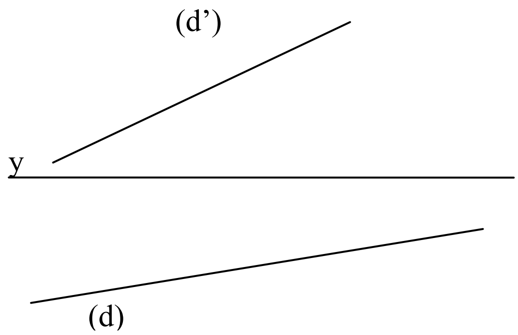
0n détermine le point M d'intersection entre la droite (D) et le plan $\mathcal{P}$ à l'intersection entre la droite (D) et la droite auxiliaire $(12) = \mathcal{B} \cap \mathcal{P}$, qui sont deux droites coplanaires de $\mathcal{B}$: $M = (D) \cap (12)$: on détermine $m = (d) \cap (1\,2)$ et en remontant en ligne de rappel on trouve $m' \in (1'2') = (d') = (Q')$.

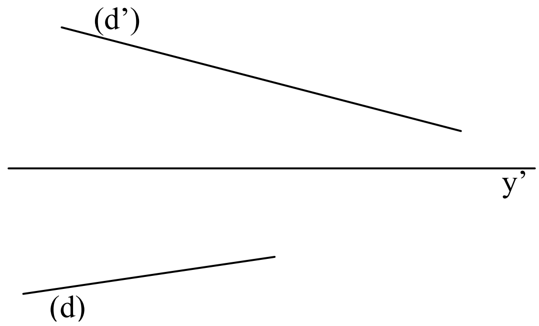
7) Déterminer l'intersection d'une droite (D) avec le premier plan bissecteur, en utilisant :
   a) un plan auxiliaire vertical
   b) un plan auxiliaire de bout.





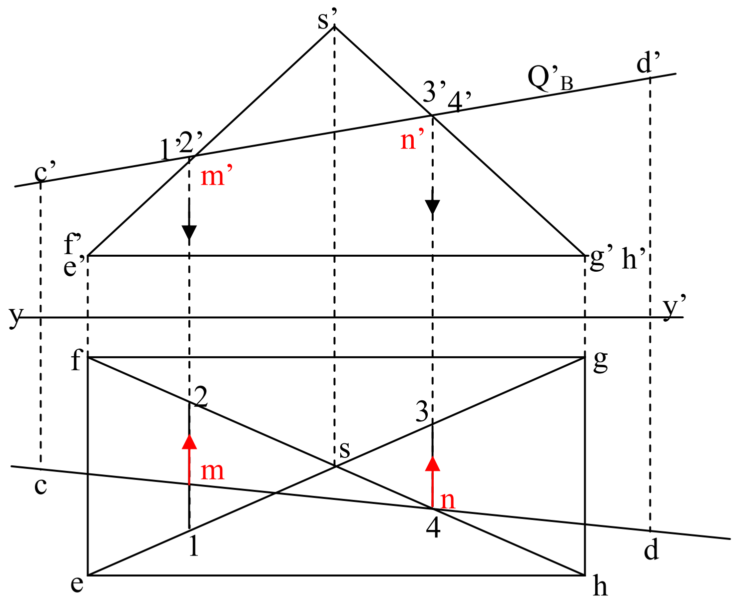
8) Déterminer l'intersection d'une droite (D) avec le deuxième plan bissecteur, en utilisant :
   a) un plan auxiliaire vertical
   b) un plan auxiliaire de bout.

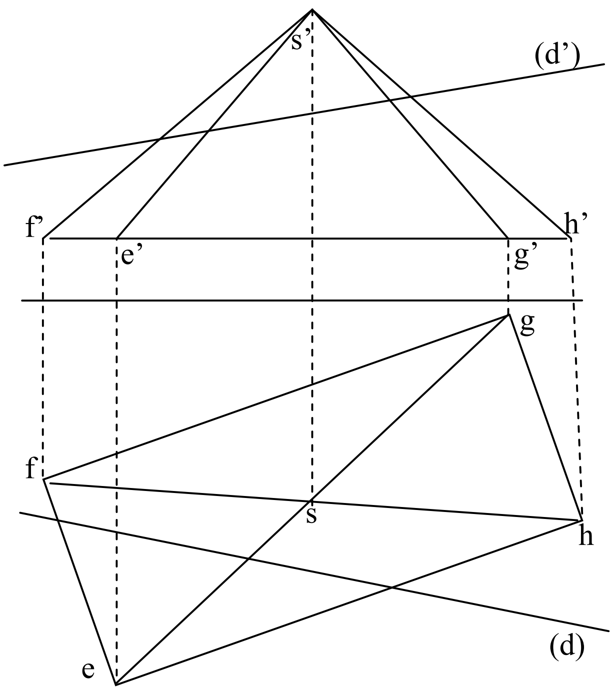




4.4. Applications

9) Déterminer les points M et N où la droite (D) perce la pyramide P = (EFGHS).





1) Soit B un plan de bout qui contient la droite (CD). Alors la projection frontale de la droite (CD) coïncide avec la trace frontale (Q') du plan B : (c'd') = (Q') .

2) Les droites d'intersection entre le plan de bout B et les faces latérales de la pyramide sont:

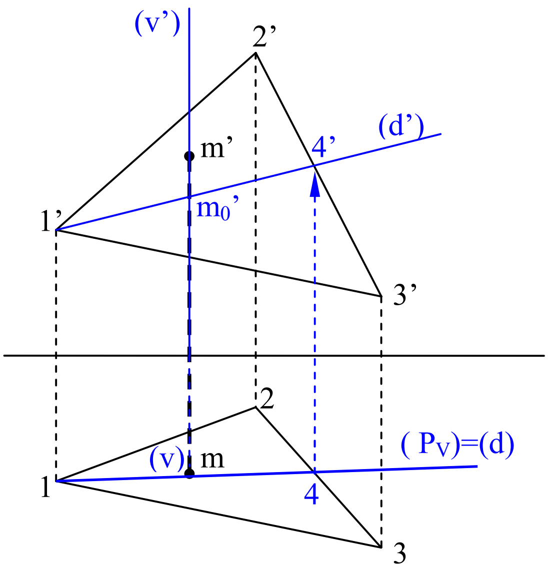
$B \cap (EFS) = (1\ 2) \parallel (EF)$ et $B \cap (HGS) = (3\ 4) \parallel (HG)$.

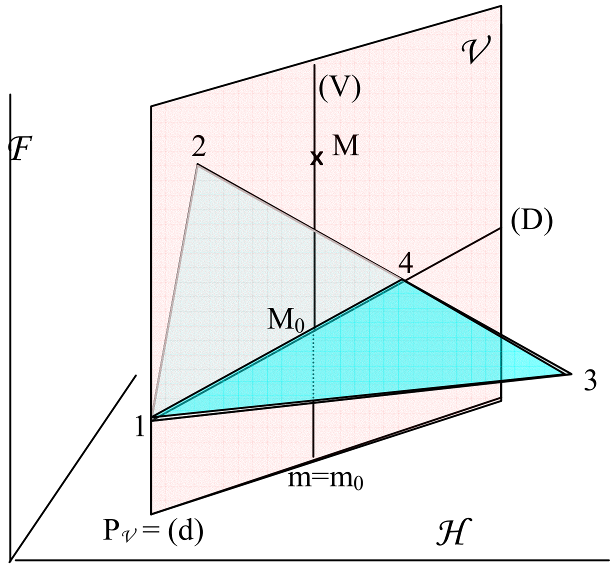
On trouve d'abord en projection frontale : 1' = 2' =(Q') ∩ (e's') et 3' = 4' = (Q') ∩ (g's') et en descendant en ligne de rappel on trouve 1 ∈ (e s), 2 ∈ (f s), 3 ∈ (g s) et 4 ∈ (h s).

3) Les points M et N d'intersection de la droite (CD) et les faces latérales de la pyramide sont M = (CD) ∩ (EFS) = (CD) ∩ (1 2) et N = (CD) ∩ (HGS) = (CD) ∩ (3 4).

On trouve d'abord en projection horizontale : m = (c d) ∩ (1 2) et n = (c d) ∩ (3 4) et en remontant en ligne de rappel on trouve m' = 1' = 2' ∈ (c' d') = (Q') et n' = 3' = 4' ∈ (c' d') = (Q').

9) Déterminer la position du point M par rapport au plan $\mathcal{P}$.





I) Soit (V) la droite verticale passant par le point M. On représente ses projections en épure : (v') ⊥ LT par m' et (v) = m.

On détermine le point d'intersection M_0 entre cette verticale (V) et le plan $\mathcal{P}$.

a) Soit ($\mathcal{V}$) le plan vertical passant par la droite verticale (V) et, par exemple, par le point 1.

Rappel : *Pour un plan vertical, tout point et toute droite se trouvant dans le plan vertical ont les projections horizontales sur la trace horizontale (P_V) du plan.*

Donc la trace horizontale (P_V) du plan vertical est déterminée par les points de projection horiz. 1 et m=(v).

b) On détermine la droite auxiliaire (D) d'intersection entre le plan $\mathcal{V}$ et le plan $\mathcal{P}$.

Comme droite du plan vertical $\mathcal{V}$, sa proj. horizontale coïncide avec la trace horizontale du plan: (d) = (P_V).

Comme droite du plan $\mathcal{P}$, elle intersecte la droite (2 3) au point 4 :

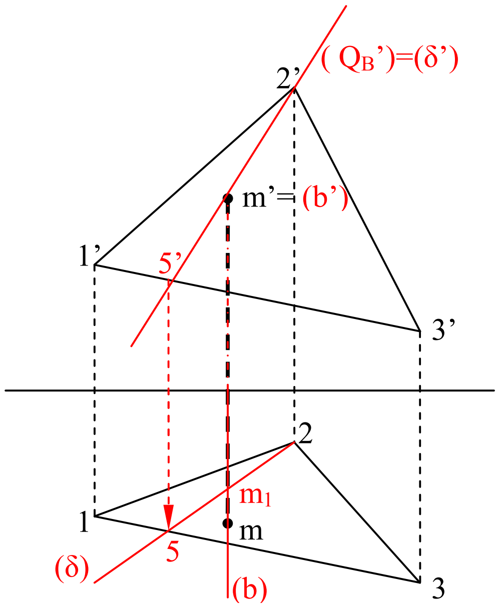
4 = (d) ∩ (23) et on remonte en ligne de rappel pour trouver 4' ∈ (2'3').

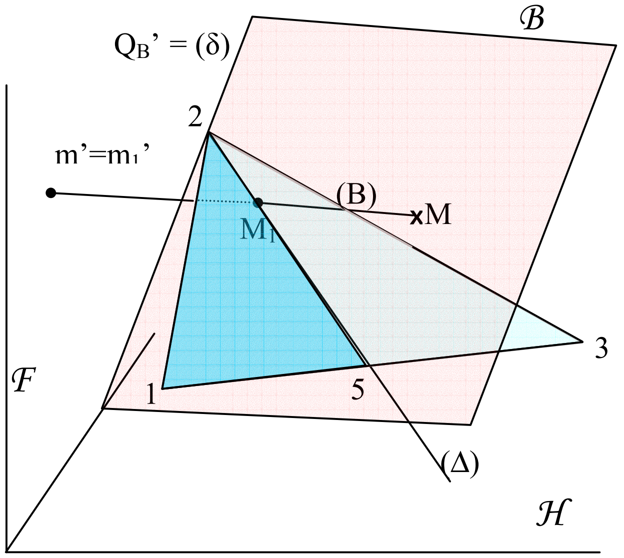
La projection frontale de la droite (D) est déterminée par les points 1' et 4' : (d') = (1'4').

c) On détermine le point M_0 = (V) ∩ $\mathcal{P}$ comme le point d'intersection entre la droite verticale et la droite auxiliaire : M_0 = (V) ∩ (D) (qui sont deux droites coplanaires !):

en projection frontale : m_0' = (v') ∩ (d') , en projection horizontale : m_0 = m.

d) On compare les cotes des points M_0 et M : m' > m_0', donc **le point M est au-dessus du plan $\mathcal{P}$.**





II) Soit (B) la droite de bout passant par le point M. On représente ses projections en épure : (b) ⊥ LT par m et (b') = m'.

On détermine le point d'intersection M_1 entre cette droite de bout (B) et le plan 𝒫.

a) Soit (ℬ) le plan de bout passant par la droite de bout (B) et, par exemple, par le point 2.

Rappel : *Pour un plan de bout, tout point et toute droite se trouvant dans le plan de bout ont les projections frontales sur la trace frontale (Q_B) du plan.*

Donc la trace frontale (Q_B) du plan de bout est déterminée par les points de projection fr. 2' et m'=(b').

b) On détermine la droite auxiliaire (Δ) d'intersection entre le plan de bout ℬ et le plan 𝒫.

Comme droite du plan ℬ, sa projection frontale coïncide avec la trace frontale du plan: (δ') = (Q_B').

Comme droite du plan 𝒫, elle intersecte la droite (13) au point 5 :

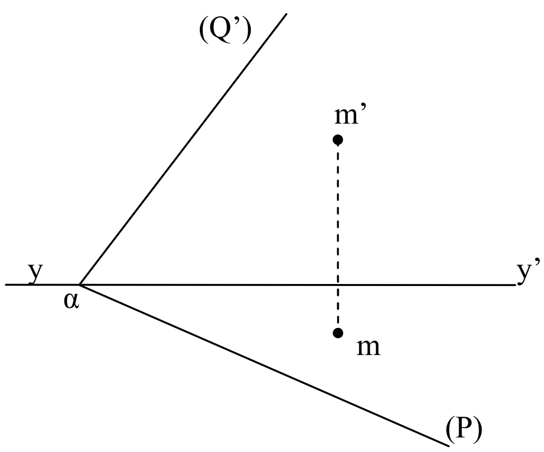
5' = (δ') ∩ (1'3') et on descend en ligne de rappel pour trouver 5 ∈ (13).

La projection horizontale de la droite (Δ) est déterminée par les points 2 et 5 : (δ) = (25).

c) On détermine le point M_1 = (B) ∩ 𝒫 comme le point d'intersection entre la droite de bout et la droite auxiliaire : M_0 = (B) ∩ (Δ) (qui sont deux droites coplanaires !):

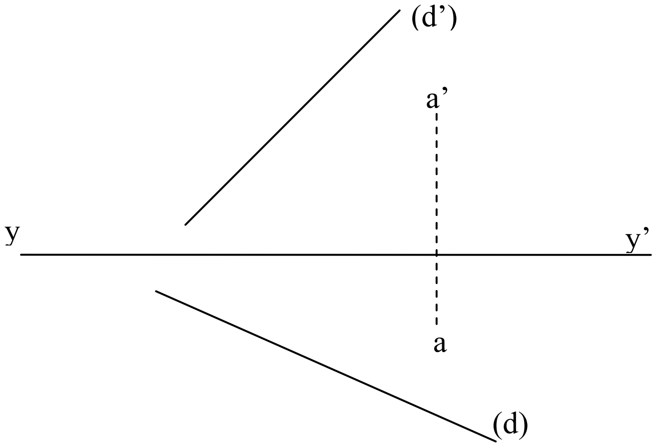
en projection horizontale : m_1 = (b) ∩ (δ) , en projection frontale : m_1' = m'.

d) On compare les éloignements des points M_1 et M : m > m_1, donc **le point M est en avant du plan 𝒫.**

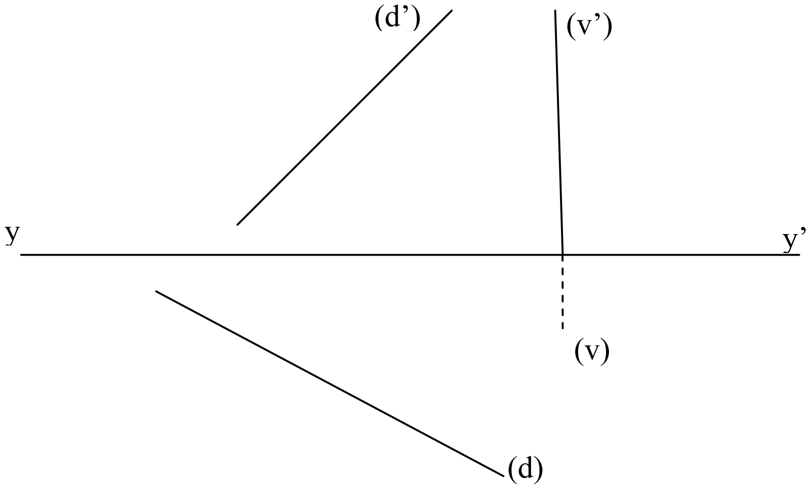


5. Problèmes d’orthogonalité

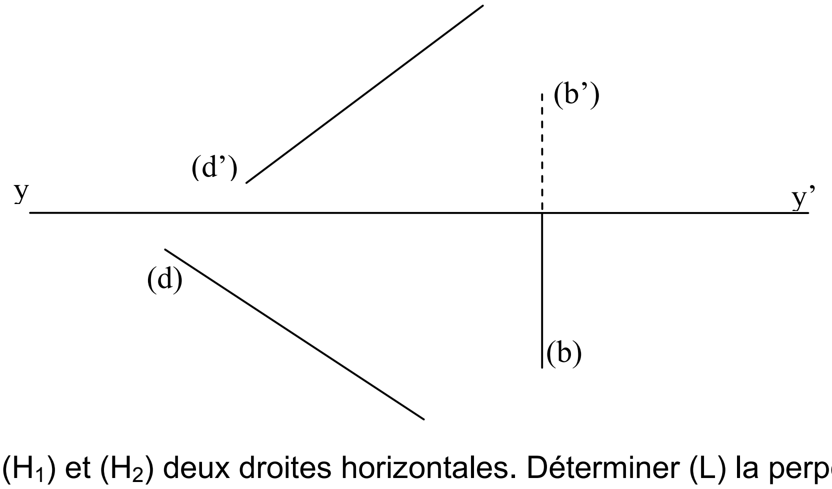
5.1) Mener par un point A la perpendiculaire (L) à une droite donnée (D).



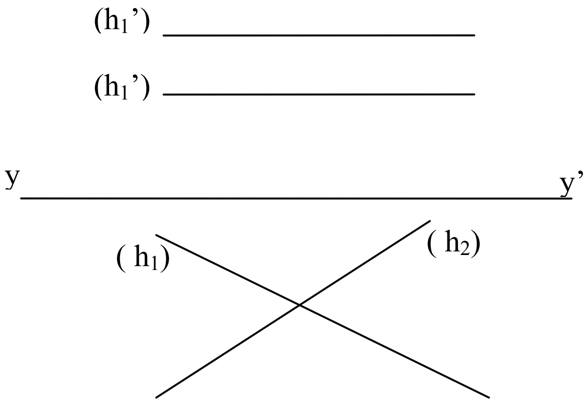
5.2) Soit (D) une droite quelconque et (V) une droite verticale. Déterminer (L) la perpendiculaire commune des deux droites.



5.3) Soit (D) une droite quelconque et (B) une droite de bout. Déterminer (L) la perpendiculaire commune des deux droites.

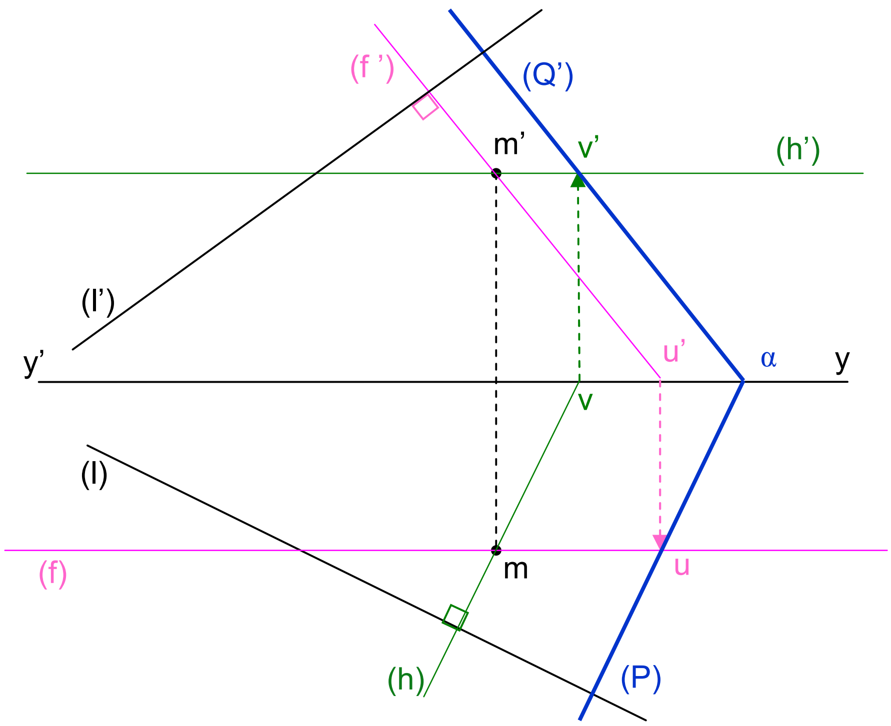


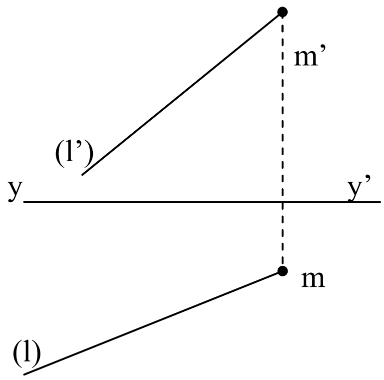
5.4) Soit (H_1) et (H_2) deux droites horizontales. Déterminer (L) la perpendiculaire commune des deux droites.



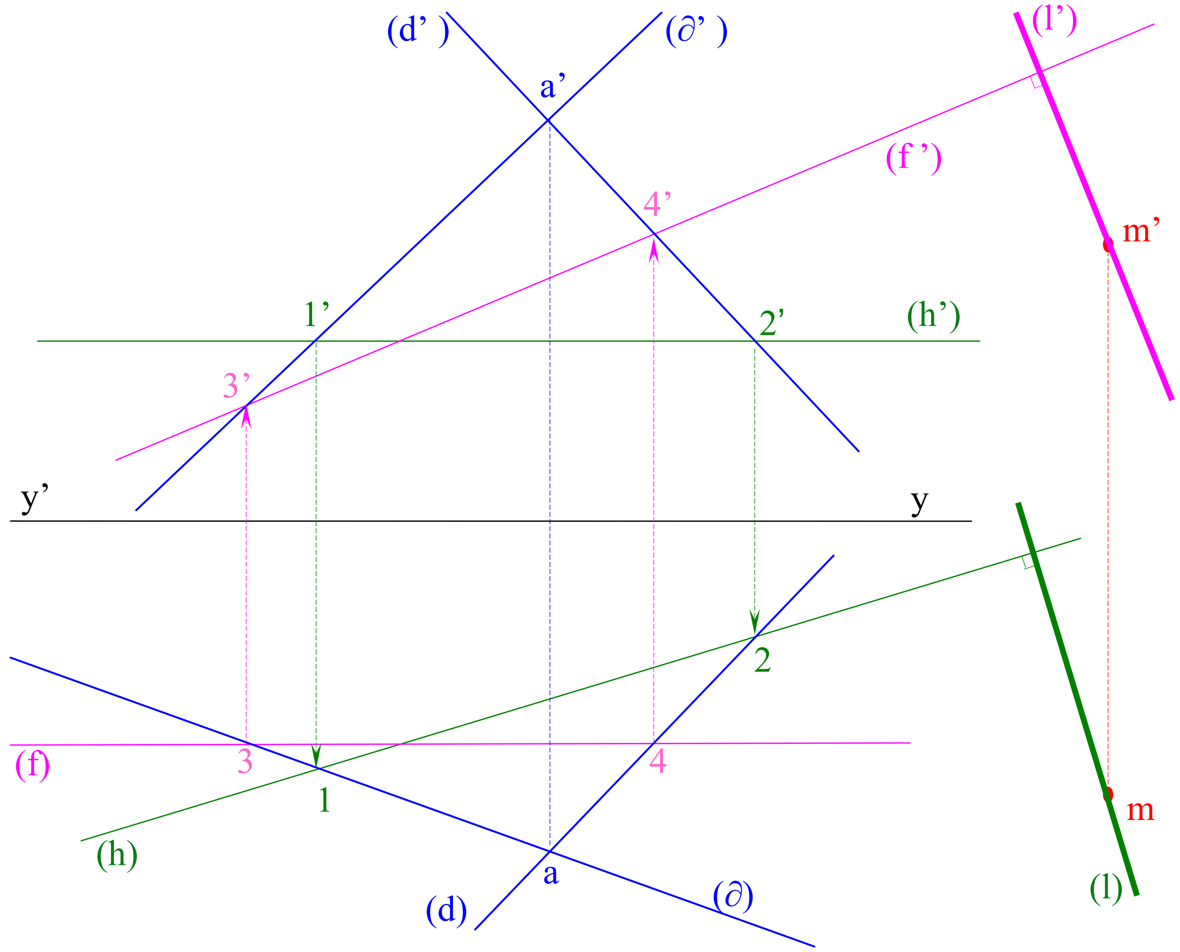
5.5) Construire une droite passant par un point donné et perpendiculaire
a) au premier plan bissecteur.
b) au deuxième plan bissecteur.

5.6) Soit une droite (L) et un point M.
a) Construire le plan Γ, passant par le point M et perpendiculaire à la droite (L).
b) Représenter le plan Γ par ses traces.





5.7) Soit $\mathcal{P}$ un plan déterminé par deux droites (D) et (Δ), sécantes en A. Soit M un point de l'espace. Construire, par le point M, une droite (L) perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.


(d')
(∂')
a'
(l')
(f ')
4'
m'
1'
2'
(h')
3'
y'
y
2
(f)
3
1
4
m
(h)
a
(∂)
(d)
(l)

6. Problèmes de parallélisme

6.1) Mener par un point A une droite (G) parallèle à une droite (D) donnée.

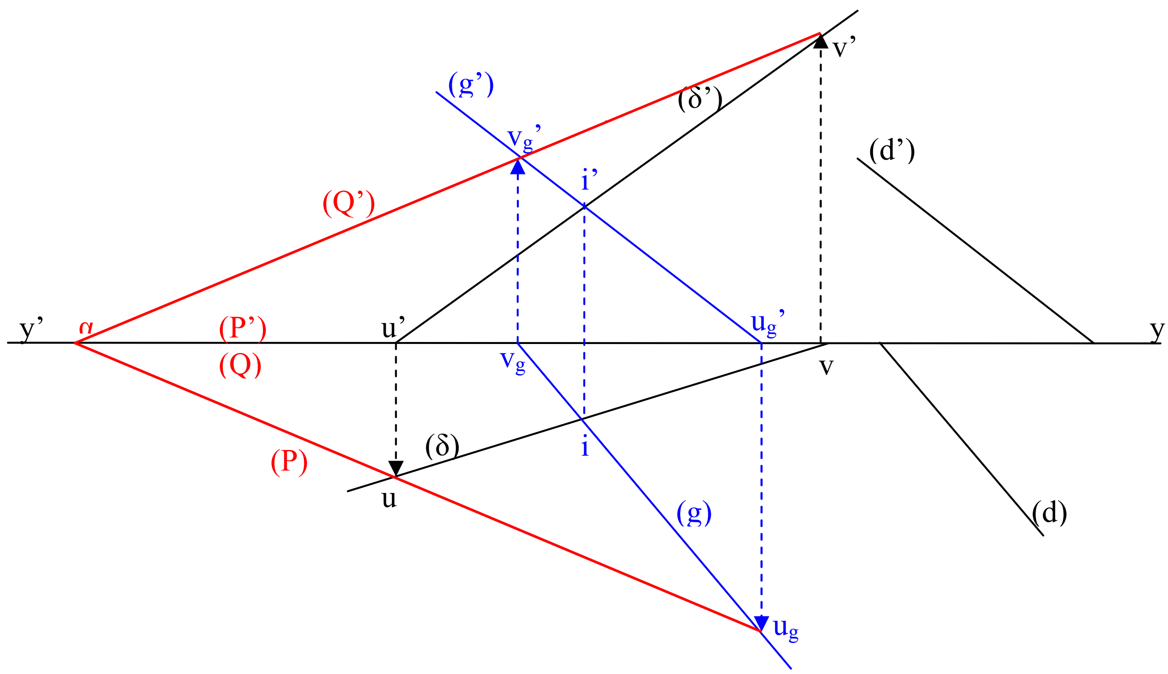
6.2) Un plan $\mathcal{P}$ est défini par deux droites (D) et (Δ) parallèles à la ligne de terre. Construire les traces (PαQ') du plan.

6.3) Construire une droite passant par un point donné et parallèle au premier plan bissecteur.

6.4) Construire une droite passant par un point donné et parallèle au deuxième plan bissecteur.

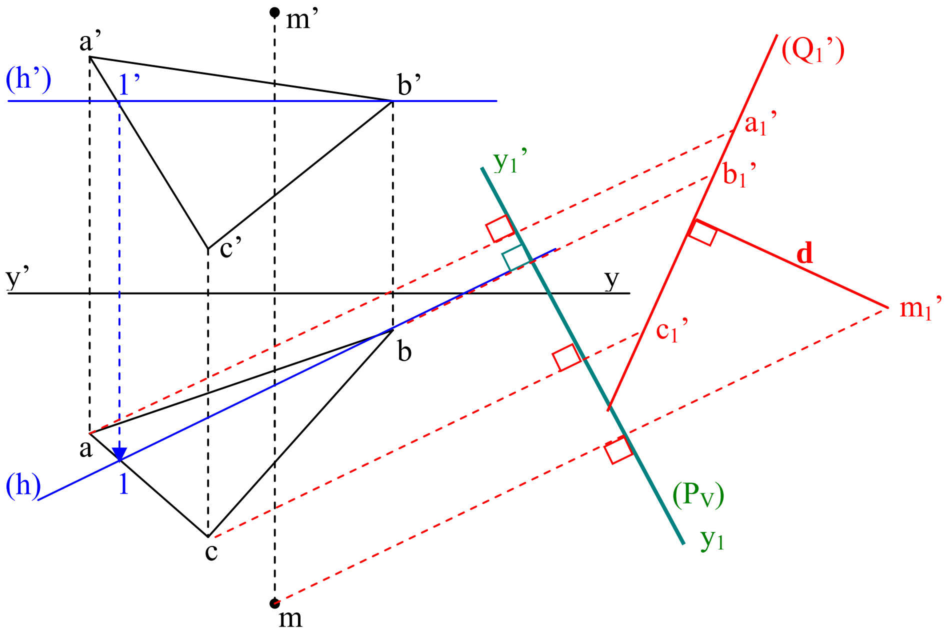
6.5) Soit $\mathcal{P}$ un plan et (D) une droite parallèle au plan passant par le point A. Sachant une de ses projections, déterminer l'autre dans les cas suivants :
a) plan déterminé par ses traces
a) plan déterminé par deux droites sécantes
a) plan déterminé par trois points

6.6) Construire par une droite donnée, un plan parallèle à une direction donnée.
Soit (Δ) et (D) deux droites quelconques (non coplanaires). Construire un plan $\mathcal{P}$ .parallèle à la droite (D) et qui contienne la droite (Δ).
a) déterminer le plan par 2 droites concourantes.
b) représenter et nommer les traces de Γ.



7. Changements de plans de projection

7.1) Soit un plan déterminé par trois points A, B et C. Soit M un point extérieur à ce plan. Déterminer la distance d entre le point M et le plan $\mathcal{P}_{(ABC)}$.



1) Construire une horizontale (H) du plan $\mathcal{P}_{(ABC)}$, qui passe par exemple par le point B.

2) Soit $\mathcal{V}$ un plan perpendiculaire à l'horizontale (H) du plan $\mathcal{P}_{(ABC)}$ (donc $\mathcal{V}$ est un plan vertical). Alors le plan $\mathcal{V}$ est perpendiculaire à tout plan qui contient la droite (H).
Comme (H) est dans le plan $\mathcal{P}_{(ABC)}$ (par construction), on a donc : $\mathcal{V} \perp \mathcal{P}_{(ABC)}$
Si on choisit $\mathcal{V}$ comme nouveau plan frontal de projection, alors $\mathcal{P}_{(ABC)}$ est un plan de bout pour ce nouveau plan frontal de projection.
Alors tous les points du plan $\mathcal{P}_{(ABC)}$ se projettent frontalement (sur $\mathcal{V}$) sur la trace frontale du plan : a_1', b_1', $c_1' \in (Q_1')$.

3) Comme $\mathcal{P}_{(ABC)} \perp \mathcal{V}$, la distance entre le point M et le plan $\mathcal{P}_{(ABC)}$, notée d = la distance, mesurée en projection frontale, sur $\mathcal{V}$, entre le point m_1' et la droite (Q_1').