

7.8. Exercices sur le Rabattement

1. Un triangle est donné par les projections de ses sommets. Construire :
 - le centre du cercle circonscrit,
 - l'orthocentre.

2. Un triangle isocèle a pour base le segment horizontal BC de projections (bc, b'c'). Construire son sommet A (a, a') situé dans le plan horizontal de projection sachant que la hauteur du triangle a une longueur donnée, égale à l.

3. Soit un plan donné par ses traces (PδQ'). Soit α et β les angles aigus formés par les droites de trace (P) et (Q') avec les plans de projection frontal et horizontal respectivement. Déterminer l'angle aigu γ entre les deux droites de trace (P) et (Q'). Montrer que ces trois angles aigus vérifient la relation
$$\cos \gamma = \cos \alpha \times \cos \beta .$$

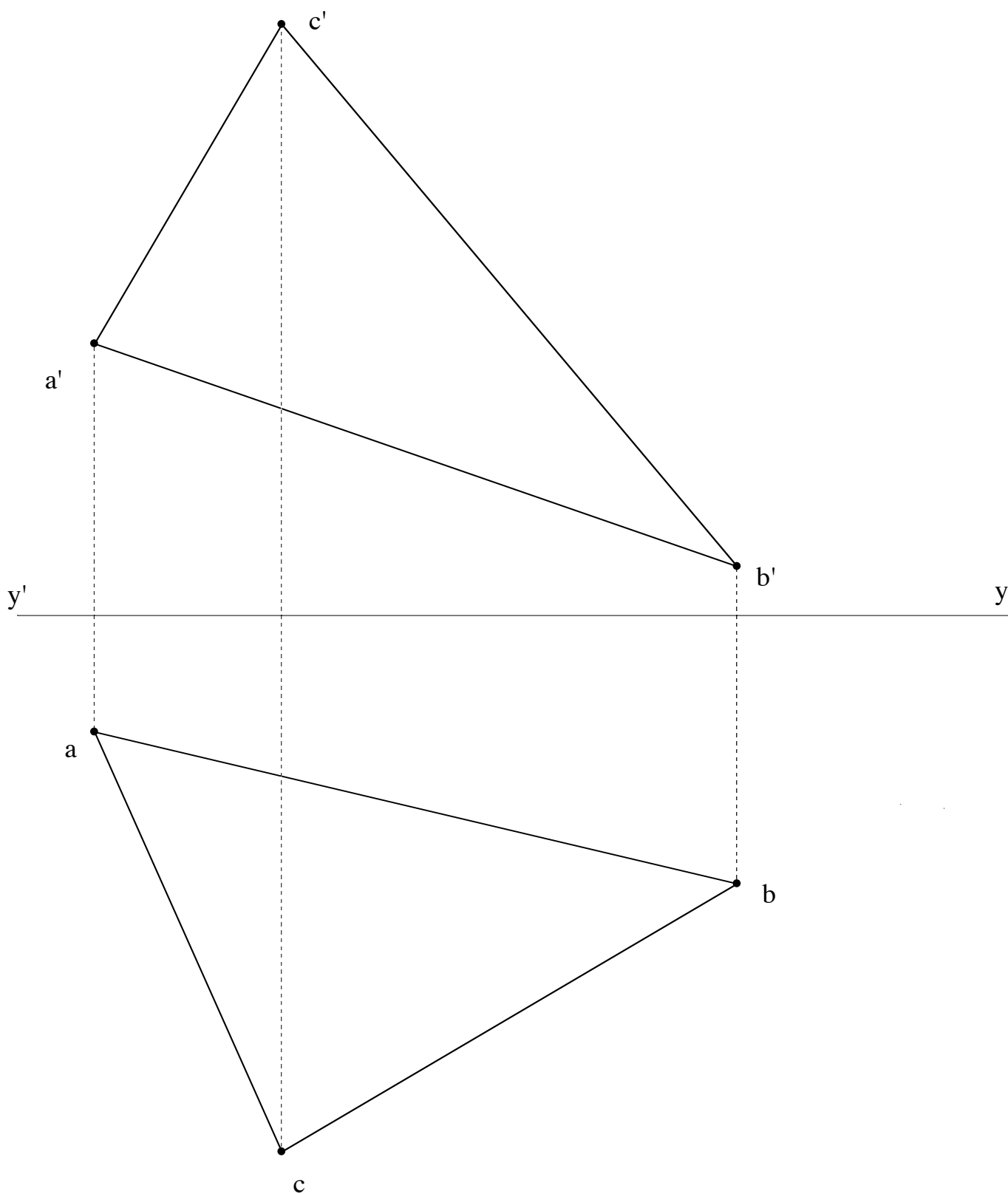
4. Deux cercles de rayons donnés R et R' sont situés dans un plan défini par ses traces P α Q'. On connaît en outre les projections horizontales de leurs centres. Construire les points communs aux deux cercles.

5. Soit un prisme hexagonal droit. Soit (P) la trace horizontale donnée et fixe d'un plan variable $\mathcal{P}$. Ce plan fait l'angle variable θ avec le plan horizontal et coupe la surface prismatique selon un polygone hexagonal (Σ), noté (ABCDEF). On rabat le plan $\mathcal{P}$ autour de (P), sur le plan horizontal. Construire :
 - le rabattement (Σ_1) du polygone hexagonal (Σ), dans le cas où l'angle θ a une valeur déterminée θ_1 .
 - le rabattement (Σ_2) du polygone hexagonal (Σ), dans le cas où l'angle θ a une valeur déterminée θ_2 .Comparer les deux rabattements (Σ_1) et (Σ_2).

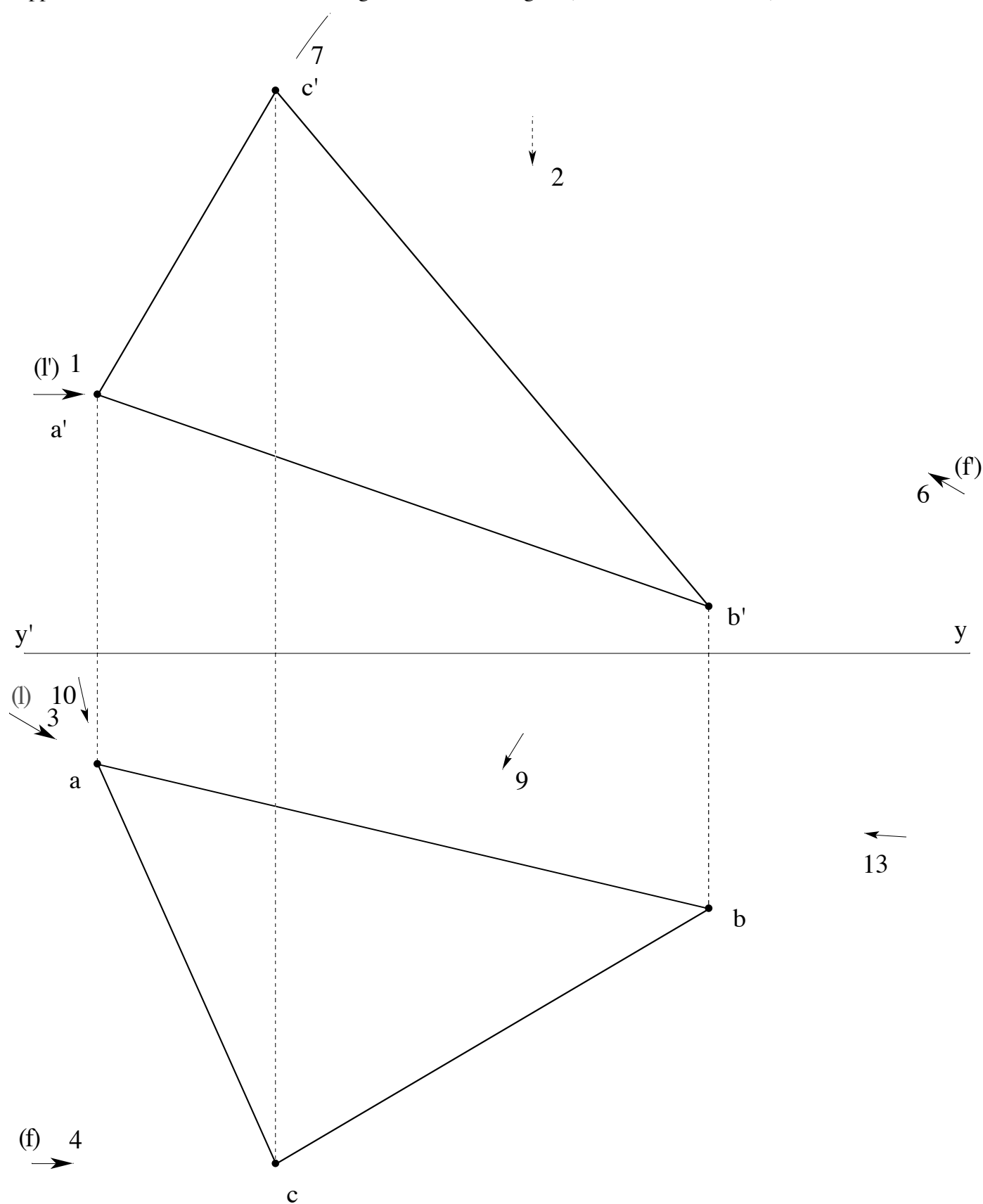
6. Soit A(a, a') un point donné dans un plan déterminé par deux droites concourantes (D) (d, d') et (Δ) (δ, δ'). Construire un triangle équilatéral dont le point A est un sommet, le deuxième sommet étant sur la droite (D) et le troisième sur (Δ).

7.8.0. Rabattements : méthode du triangle rectangle :

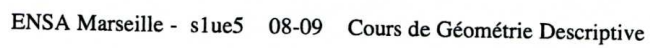
Application à la construction de la vrai grandeur d'un triangle (données de la construction)



7.91. Rabattements méthode de la frontale:
Application à la construction de la vrai grandeur d'un triangle (feuille de construction)



Application à la construction de la vraie grandeur d'un triangle (données de la construction)



Rabatteurs: méthode du triangle rectangle

0) Construction de la charnière (L) = une horizontale du plan $P = (ABC)$, passant par le point A (par exemple) :

proj. fr : $(l') \parallel LT$ et passe par a'

proj. limit : $m' = (l') \cap (b'c') \rightarrow m \in (bc) \Rightarrow (l) = (am)$

I) Rabattement du point C par la méthode du triangle rectangle

1) On trace, par le point à rabattre c , la perpendiculaire (d) à la charnière et on note μ le pied de cette perpendiculaire sur (l)

Le point rabattu c_1 se trouve toujours sur cette perpendiculaire. Où exactement?

2) On construit le triangle de rabattement $\Delta(c, \mu, t)$, rectangle en μ avec un côté $(c\mu)$ connu et l'autre côté (μt) de longueur égale avec la différence entre la cote c' du point C et la cote de la charnière

- a) on trace la perpendiculaire en c à (d) (pour avoir l'angle droit en c)
- b) on prend en compas la longueur du segment $(c'e')$
- c) on trace l'arc de cercle (de centre c) sur cette perpendiculaire $\Rightarrow t$

3) On mesure (en compas) l'hypoténuse (μt) du triangle de rabattement $\Delta(c, \mu, t)$

4) On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre μ et de rayon $r = (\mu t)$

5) On détermine le point rabattu : $c_1 = (d) \cap \mathcal{C}$

II) Rabattement du point A : Comme $A \in (L) = \text{charnière} \Rightarrow A_1 = A$

III) Rabattement du point B par la méthode des alignements

1) On considère la droite $(CB) \equiv (G)$ pour laquelle on connaît le point d'intersection avec la charnière : $N = (L) \cap (CB) \Rightarrow N_1 = N$

2) Pour cette droite on connaît les rabattus de 2 points :

c_1 le rabattu de c et $n_1 = n$ le rabattu de n .

$\Rightarrow$ la droite $(g_1) = (c_1, n_1)$ est la rabattue de la droite $(g) = (cn)$

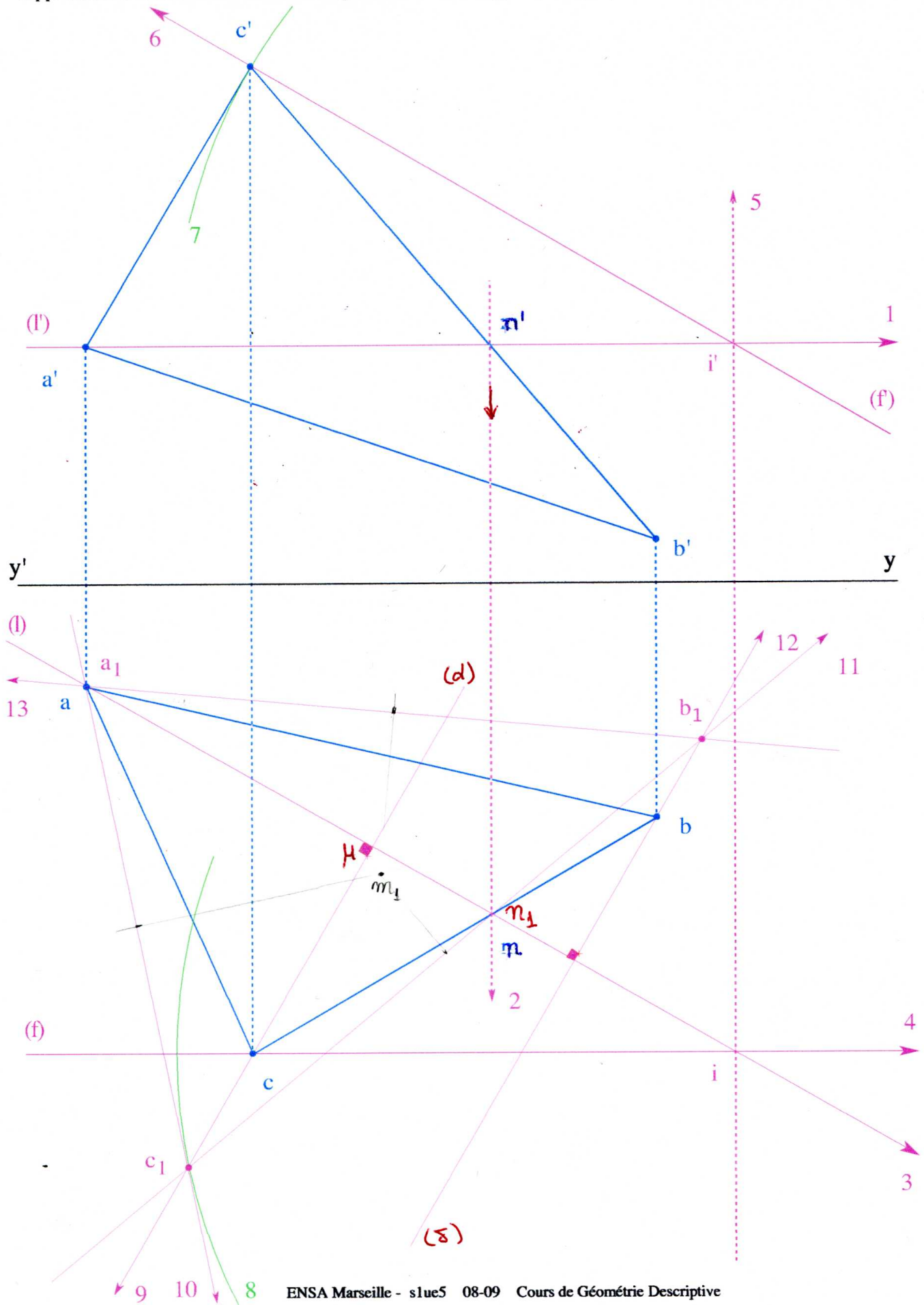
3) Comme $B \in (G) = (CB) \Rightarrow$ son rabattu $B_1 \in (G_1)$; $b_1 \in (g_1) = (c_1, n_1)$

Où exactement ?

4) On trace la perpendiculaire (δ) de b à la charnière (l) :

$$b_1 = (c_1, n_1) \cap (\delta)$$

7.9.0 Rabattements méthode de la frontale:
Application à la construction de la vrai grandeur d'un triangle (Solution)



Rabattements : méthode de la frontale

0) Construction de la charnière (L) = une horizontale du plan (ABC), passant par le point A (par exemple) :

proj. fr : $(l') \parallel LT$ et passe par a'

proj. horiz : $m' = (l') \cap (b'c') \rightarrow m \in (bc)$

$$\Rightarrow (l) = (am)$$

1) RABATTEMENT DU POINT C par la méthode de la frontale

2) Construction de (F) = une frontale du plan (ABC) qui passe par le point à rabattre C :

a) proj. horiz. : $(f) \parallel LT$ et passe par c

* 6) On détermine le point d'intersection avec la charnière $I = (F) \cap (L)$:

$$i = (f) \cap (l) \nearrow i' \in (l')$$

c) proj. fr : $(f') = (i'c')$

4) On trace, par le point à rabattre, c, la perpendiculaire (d) à la charnière et on note p le pied de cette perpendiculaire sur (l). Le point rabattu c_1 se trouve toujours sur cette perpendiculaire. Où exactement ?

3) On mesure, en proj. fr., le segment $(i'c')$, qui est égal avec le ségu. $(i'c_1')$ voir fig 7.1. a cours $\Rightarrow$

$(i'm')$	$= (IM)$	$= (IM_1)$	$= (i'm_1)$
$\uparrow$ frontale		$\downarrow$ rabattement	$\downarrow$ horizontale

4) On trace le cercle C, de centre i et rayon $r = (i'c') = (i'c_1')$

5) On détermine le point rabattu : $c_1 = (d) \cap C$

* Remarque : Le point d'intersection I entre (F) et (L) existe si les deux droites ne sont parallèles $(F) \nparallel (L)$.

(dans ce cas (L) serait aussi une frontale, en plus d'être une horizontale !)

Dans ce cas, on aurait $(F) \parallel (L) \parallel LT$, et la plan (ABC) contenant ces droites serait lui aussi parallèle avec la L.T.

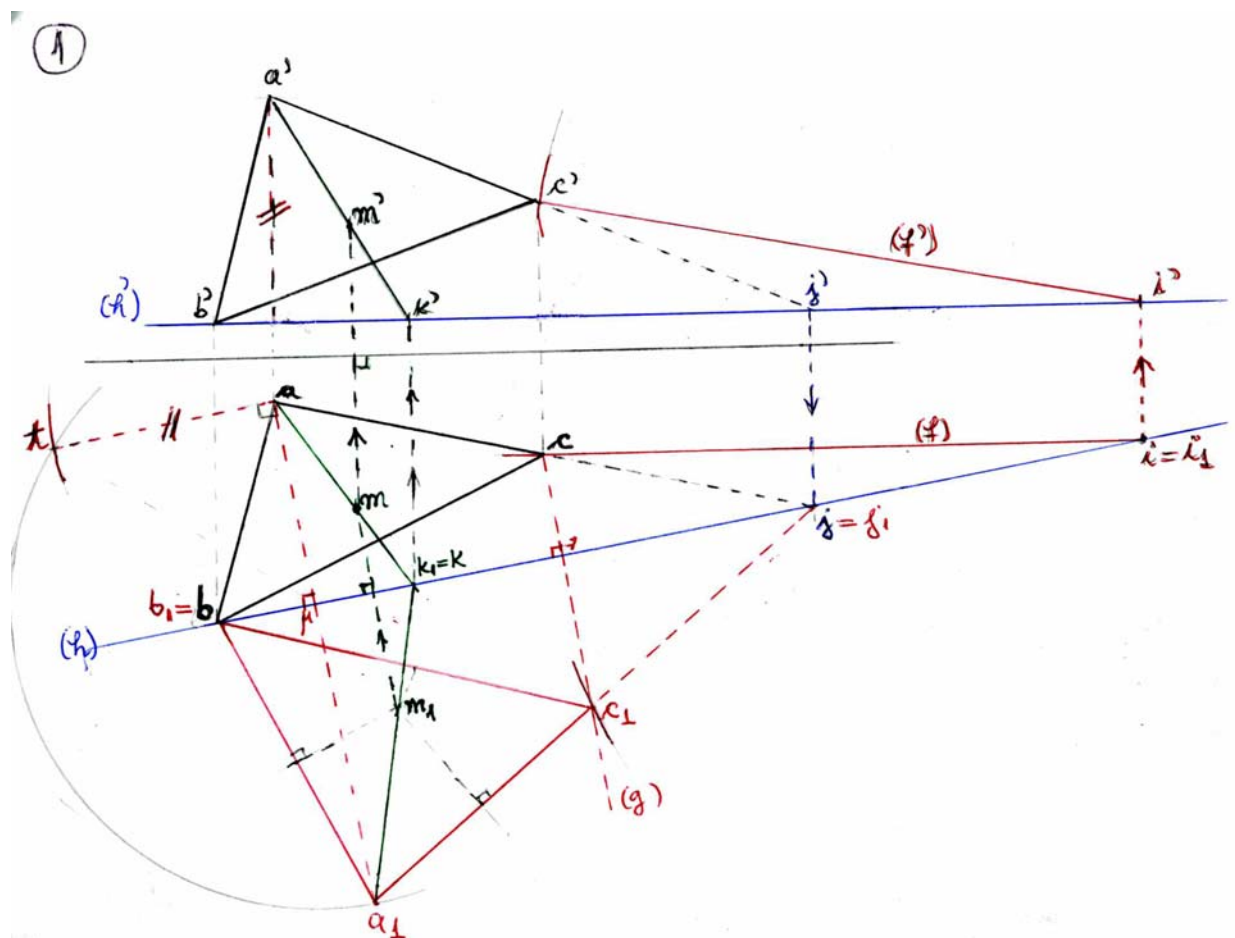
La méthode de la frontale ne peut pas s'appliquer donc dans ce cas.

Rabatement du point A : Comme $A \in (L) = \text{charnière} \Rightarrow A_1 = A$

II) Rabatement du point B par la méthode des alignements

- 1) On considère la droite $(CB) \stackrel{\text{notée}}{=} (G)$ pour laquelle on connaît le point d'intersection avec la charnière : $N = (L) \cap (CB)$ avec n, n' proj.
 $\Rightarrow N_1 = N$
- 2) Pour cette droite on connaît les rabattus de 2 points :
 c_1 le rabattu de c et $n_1 = n$ le rabattu de n
 $\Rightarrow$ la droite $(g_1) = (c_1 n_1)$ est la rabatue de la droite $(g) = (cn)$
- 3) Comme $B \in (G) = (CB) \Rightarrow$ son rabattu $B_1 \in (G_1)$: $b_1 \in (g_1) = (c_1 n_1)$
Où exactement ?
- 4) On trace la perpendiculaire (δ) de b à la charnière (L) :
 $b_1 = (c_1 n_1) \cap (\delta)$

Ex.1) Construire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



1) Soit (H) une horizontale du plan (ABC), par exemple celle qui passe par le point B. (H) sera la charnière de rabatement du triangle (ABC).
 - proj.fr. : $(h') \parallel LT$ et passe par le point b'
 - proj.horiz. : déterminer $j' = (h') \cap (a'c')$ et on descend en ligne de rappel en j sur (ac). Alors $(h) = (bj)$.

2) Déterminer le rabatement a_1 du point A, par la méthode du triangle :
 - Soit (d) la perpendiculaire de a sur (h). Le point rabattu a_1 se trouve sur cette droite.
 - Soit la perpendiculaire en a à (d), sur laquelle on mesure un segment (at) de longueur égale avec la distance de a' à (h') .
 - On mesure l'hypoténuse (μ t) du triangle de rabattement.
 - On trace le cercle $C(\mu, r = (\mu t))$.
 - On détermine $a_1 = (d) \cap C$.

3) Comme $B \in (H) = \text{charnière} \Rightarrow B$ est invariant par rabatement : $B_1 = B$.

4) Déterminer le rabatement c_1 du point C, par la méthode des alignements :
 Le point $J = (AC) \cap (H)$ se trouve sur la charnière, donc est invariant : $j = j_1$.
 Alors $(a_1 j_1)$ est la rabattue de la droite $(aj) = (ac)$.
 Comme C (AJ) alors c_1 , le rabattu de c doit se trouver sur $(a_1 j_1)$.
 D'autre part, c_1 doit se trouver sur la perpendiculaire (g) de c sur (h).
 Donc $c_1 = (g) \cap (a_1 j_1)$.

5) On détermine m_1 l'intersection des médiatrices du triangle rabattu $(A_1 B_1 C_1)$.

Remarque : les milieux des cotés du triangle on aurait pu les déterminer aussi sur le triangle d'origine, mais on ne pouvait pas construire les perpendiculaires. Comme le triangle rabattu est parallèle avec le plan horizontal de projection, ces perpendiculaires se voient en projection horizontale.

6) On détermine le point m , le relevé du point m_1 , par la méthode des alignements sur la droite (AM) , dont le rabattement est $(a_1 m_1)$:

- Soit $k_1 = (a_1 m_1) \cap (h)$. Donc le point K appartient à la charnière et il est donc invariant : $k_1 = k$.

- Comme $m_1 \in (a_1 k_1)$, alors $m \in (a k)$.

- De plus, les points m et m_1 se trouvent sur la perpendiculaire (l) à (h) .

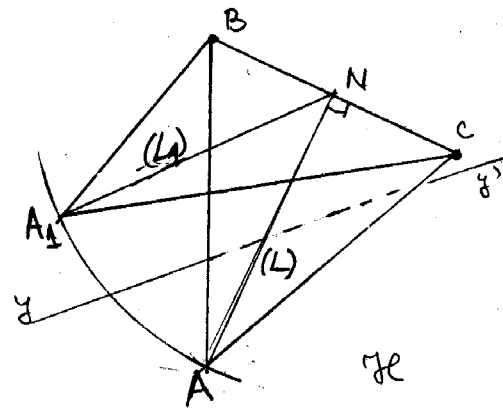
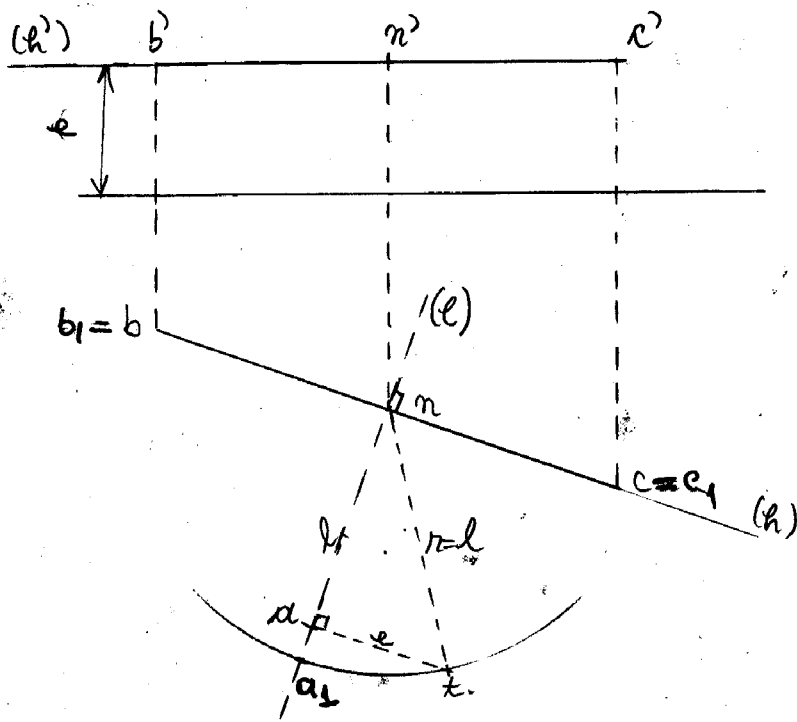
- Donc $m = (a k) \cap (l)$.

7) Pour trouver la projection frontale m' :

du point $k \in (h)$ on monte en ligne de rappel en $k' \in (h')$ et

de $m \in (a k)$ on monte en ligne de rappel en $m' \in (a'k')$.

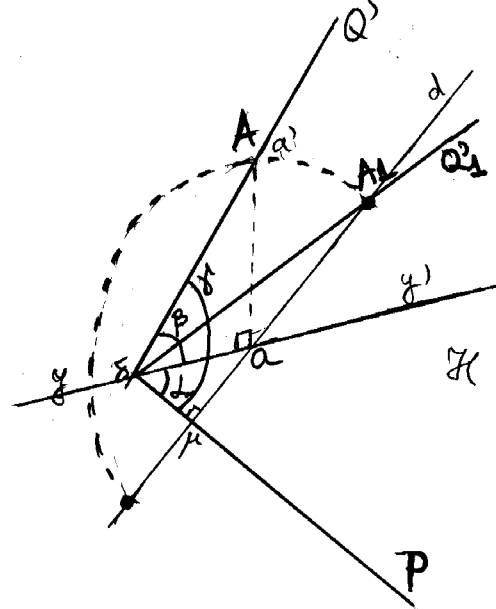
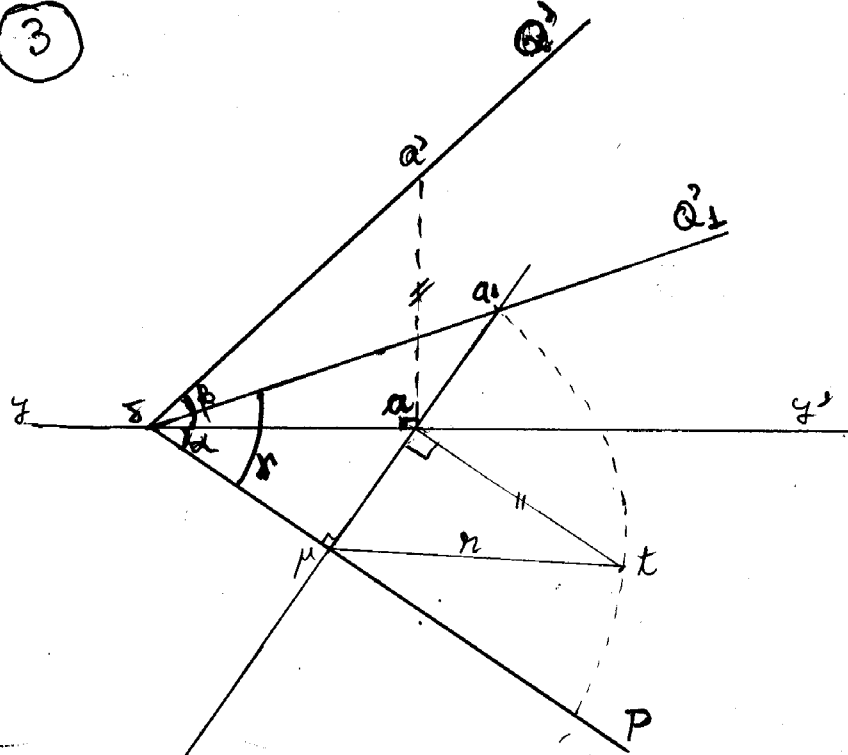
2



- 1) Epure de départ : Soit (BC) une horizontale ; de projections $\begin{cases} (b'c') \parallel LT \\ (bc) \end{cases}$
- 2) Soit N le milieu du segment $(BC) \Rightarrow n' = \text{milieu de } (b'c')$ et $n = \text{milieu de } (bc)$
- 3) N est le pied de la hauteur du triangle (L) , de A sur (BC) $\stackrel{(BC) = \text{horiz.}}{=} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (l) \perp (bc)$ en n
- 4) Le point a se trouve sur la droite (l) , mais on ne sait pas où, car la longueur l de la hauteur (L) on ne la voit pas en vraie dimension
- $\Rightarrow$ On fait le rabattement du point A , en A_1 , autour de la charnière $(H) = (BC)$, dans le plan horizontal $\mathcal{H}_1$ de la charnière
- $\Rightarrow \begin{cases} (AN) = (A_1N) \text{ (ou } (L) = (L_1)) \text{ et les deux ont la longueur } l \\ \text{le point rabattu } a_1 \text{ se trouve sur la perpendiculaire à } (bc) \text{ en } n, \text{ comme } a \\ \text{la longueur } (a_1, n) = l \text{ on la voit en vraie en proj. horiz. (car } (A_1N) = \text{horiz.}) \end{cases}$
- $\Rightarrow$ Le point a_1 se trouve sur (l) , à distance l de n .
- 5) On détermine le point A par relèvement du point A_1 (méthode du triangle de rabattement)
- on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre n et rayon $r = l = (na_1)$
- on détermine l'intersection t entre ce cercle et une perpendiculaire à (l) de longueur fixe $e = \text{dist}(A', \mathcal{H}_1)$

Remarque : Il faut que $l > e$

3



Le problème : Soit α et β les angles formés par les droites de trace P, Q' du plan avec les plans de projection ($\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$). Ce sont les angles qu'on voit en épure (entre P, Q' et la LT). Déterminer l'angle γ entre les deux droites de trace P et Q' (qui n'est pas la somme $\alpha + \beta$). Cet angle on le voit, en vrai, en épure, entre P et Q'_1 = la rabattue de la droite Q' .

Remarque : Q'_1 c'est la rabattue de la droite Q' et non la trace du plan rabattu !

1) Soit $A \in Q'$ ($a \in Q', a \in LT$). Construire A_1 le rabattu de A autour de la charnière P , dans le plan horizontal de projection :

- soit (d) la perpendiculaire de a sur P et $\mu = d \cap P$. Il faut trouver $a_1 \in d$.
- construire le triangle de rabattement $\Delta \mu a t$, rectangle en a , avec : $at = \text{dist}(A, \mathcal{H}) = a'$
- tracer le cercle $\mathcal{C}(\mu, r = \mu t)$ et déterminer $a_1 = d \cap \mathcal{C}$

$\Rightarrow Q'_1 = (\delta a_1)$ = la rabattue de la droite de trace Q' , dans le plan $\mathcal{H}$, autour de la charnière P .

2) Le vrai angle entre les traces du plan $\gamma = \angle(P, Q'_1)$ est vrai en épure entre P et Q'_1 .

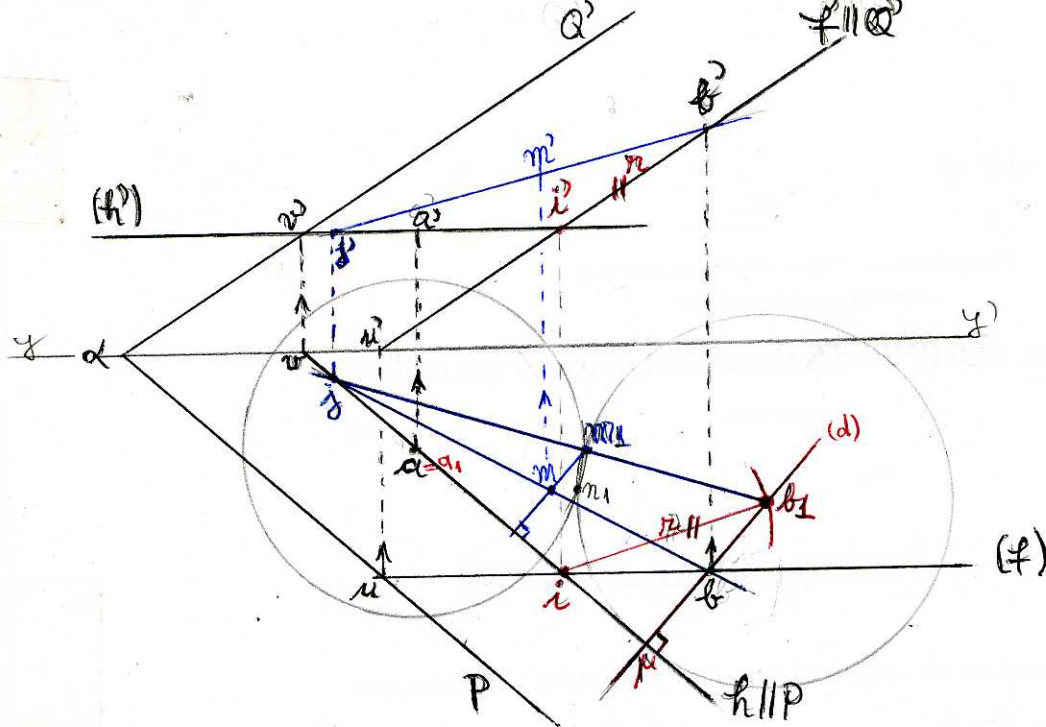
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(\delta \mu)}{(\delta a)} \quad (\text{dans le } \Delta \delta \mu a) \\ \cos \beta &= \frac{(\delta a)}{(\delta a')} \quad (\text{dans le } \Delta \delta a a') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{(\delta \mu)}{(\delta a')} \quad (*)$$

$$\cos \gamma = \frac{(\delta \mu)}{(\delta a_1)} \quad (\text{dans le } \Delta \delta \mu a_1) \quad (**)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Comme } A \in Q' \subset \mathcal{H}' &\Rightarrow (\delta a') \equiv (\delta A) \\ A_1 \in \mathcal{H} &\Rightarrow (\delta a_1) \equiv (\delta A_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\delta a') = (\delta a_1) \quad (***)$$

et $(\delta A) = (\delta A_1)$ par le principe du rabattement

de (*) (***) et (***) $\Rightarrow \boxed{\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta}$



1) Soit a, b les proj. horiz. des centres des cercles. On trouve les proj. frontales a', b' en construisant :

- H une horizontale du plan, qui passe par A (qui sera la charnière)
- F une frontale du plan, qui passe par B (qui sera utilisée pour la méthode de la frontale)

$$H: \left\{ \begin{array}{l} h \text{ passe par } a \text{ et } h \parallel P \\ \text{la trace de } H: v \in Q: v = h \cap (yy') \text{ et } v' \in Q' \\ h' \parallel LT \text{ et passe par } v' \end{array} \right\} \Rightarrow a \in h \text{ et } a' \in h'$$

$$F: \left\{ \begin{array}{l} f \parallel LT \text{ et passe par } b \\ \text{la trace de } F: u \in P: u \in f \cap P \text{ et } u' \in LT \\ f' \text{ passe par } u' \text{ et } f' \parallel Q' \end{array} \right\} \Rightarrow b \in f \text{ et } b' \in f'$$

2) On construit B_1 le rabattement de B , autour de H . ($A_1 = A \in H$)

Avec la méthode de la frontale : F qui passe par B et $F \cap H = \dot{I} (i, i')$

- ou mesure $r = (i' b')$

- ou trace de cercle $\mathcal{C}(i, r)$. On détermine $b_1 = \mathcal{C} \cap d$ (où $d = la \perp$ de b sur h)

3) On construit les cercles $\mathcal{C}(a, R)$ et $\mathcal{C}(b_1, R')$ (dans le plan de rabattement)

Soit m_1 et n_1 les points d'intersection des 2 cercles.

4) Relèvement des points m_1 et n_1 en m et n respectivement.

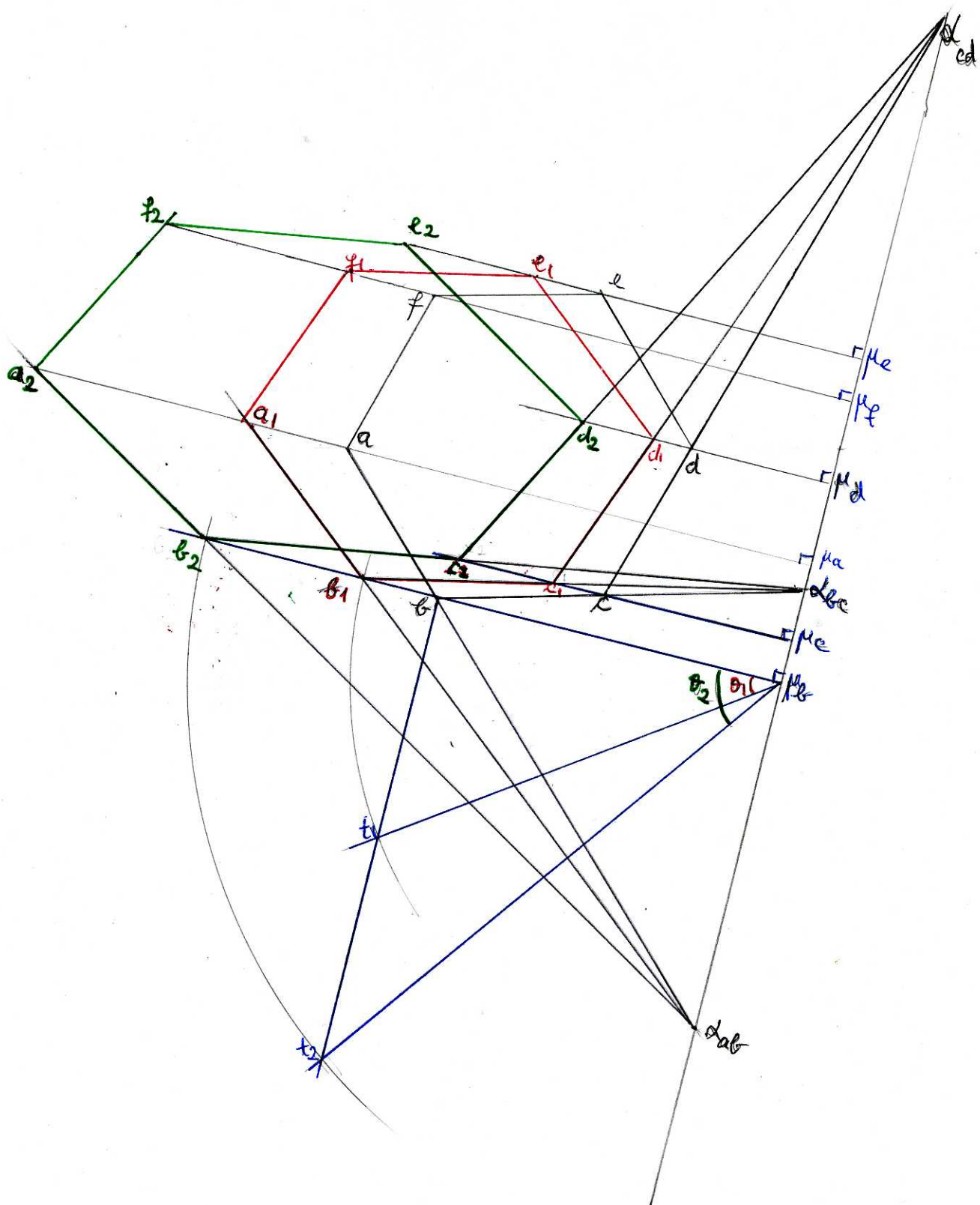
Pour m_1 : Soit $j = (m_1 b_1) \cap h \Rightarrow j' \in h'$ (j est invariant par rabattement, $j' \in H$)

$\Rightarrow$ le relèvement de la droite $(m_1 b_1) \equiv (j' b_1)$ est la droite $(j' b')$

Soit g la perpendiculaire de m_1 sur $h \Rightarrow m \equiv g \cap (j' b') \Rightarrow m' \in (j' b')$

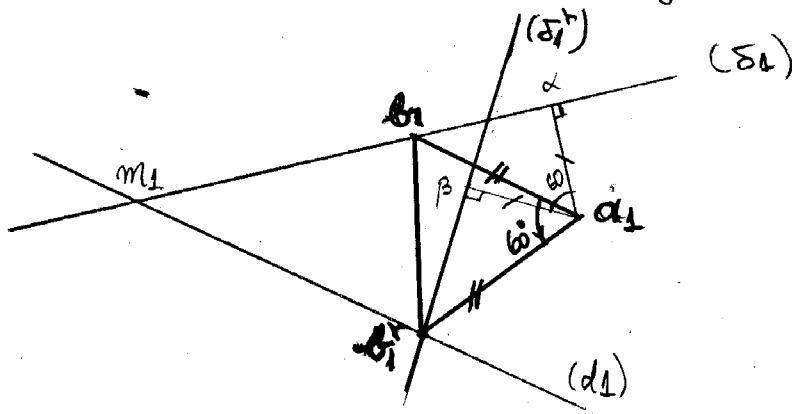
Analogie pour n_1 .

5



$$d_1 = (1 m_1) ; \quad \delta_1 = (2 m_1) \quad \text{et} \quad a_1 = a$$

3) On construit le triangle équilatéral demandé dans le plan de rabattement
 (où on voit toutes les dimensions en vrais — angles et longueurs de segments)



a) On fait une rotation de 60° de la droite (δ_1) autour du point a_1

b) Soit $b_1^r = d_1 \cap \delta_1^r$. On cherche le point $b_1 \in \delta_1$, qui arrive sur b_1^r par une rotation de 60° autour de a_1 :

— on prend en coupe le segment (a_1, b_1^r) et on détermine b_1 à l'intersection de l'arc de cercle avec (δ_1)

$$\angle(b_1, a_1, b_1^r) = \angle(a_1, \beta) \stackrel{60^\circ}{=} \text{car les triangles } \Delta a_1, \alpha, b_1 \equiv \Delta a_1, \beta, b_1^r$$

$\Rightarrow$ Le triangle $\Delta(a_1, b_1, b_1^r)$ est équilatéral, car: $\begin{cases} (a_1, b_1) = (a_1, b_1^r) \\ \angle(b_1, a_1, b_1^r) = 60^\circ \end{cases}$

4) On relève les points b_1 en b et c_1 en c

$\Rightarrow \Delta(a, b, c) \nearrow \Delta(a', b', c')$ équilatéral:

— $(\delta) = (2m) =$ la droite relevée de $\delta_1 = (2m_1, b_1) \Rightarrow$ le relevé b de b_1 se trouve sur δ , à l'intersection avec la $\perp$ de b_1 sur h

$$b \in \delta \quad b' \in \delta'$$

— $(d) = (1m) =$ la droite relevée de $d_1 = (1m_1, c_1) \Rightarrow$ le relevé c de c_1

se trouve sur d , à l'intersection avec la $\perp$ de c_1 sur h

$$c \in d \quad c' \in d'$$